Zadania powtórzeniowe

637. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{3n+1}{n} \leqslant \frac{3^{3n-3}}{2^{2n-4}}.$$

638. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n} \geqslant \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}.$$

639. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\frac{(2n)!}{n!\cdot(n+1)!} \leqslant 4^{n-1}.$$

640. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{2}{3}\cdot n\cdot\sqrt{n+1} \;<\; \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{n-1}+\sqrt{n} \;<\; \frac{2}{3}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1).$$

Spróbuj rozwiązać powyższe zadania zanim zajrzysz na kolejne strony.

637. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{3n+1}{n} \leqslant \frac{3^{3n-3}}{2^{2n-4}}\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ mamy

$$L=\binom{4}{1}=4$$

oraz

$$P=\frac{3^0}{2^{-2}}=4\,.$$

Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4\leqslant 4$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{3n+1}{n} \leqslant \frac{3^{3n-3}}{2^{2n-4}}\,. \tag{$\clubsuit$}$$

Wykażemy, że wówczas zachodzi nierówność

$$\binom{3n+4}{n+1} \leqslant \frac{3^{3n}}{2^{2n-2}}\,. \tag{$\diamondsuit$}$$

Zauważmy najpierw, że lewą stronę nierówności ($\clubsuit$) można zapisać jako

$$\binom{3n+1}{n}=\frac{(3n+1)!}{n!\cdot(2n+1)!}\,.$$

Przekształcając lewą stronę nierówności ($\diamondsuit$) i korzystając z założenia indukcyjnego ($\clubsuit$) otrzymujemy

$$L=\binom{3n+4}{n+1}=\frac{(3n+4)!}{(n+1)!\cdot(2n+3)!}=\frac{(3n+1)!}{n!\cdot(2n+1)!}\cdot\frac{(3n+2)\cdot(3n+3)\cdot(3n+4)}{(n+1)\cdot(2n+2)\cdot(2n+3)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{3^{3n-3}}{2^{2n-4}}\cdot\frac{(3n+2)\cdot 3\cdot(3n+4)}{(2n+2)\cdot(2n+3)}\leqslant\frac{3^{3n-3}}{2^{2n-4}}\cdot\frac{27}{4}=\frac{3^{3n}}{2^{2n-2}}=P\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{(3n+2)\cdot 3\cdot(3n+4)}{(2n+2)\cdot(2n+3)}\leqslant\frac{27}{4}\,. \tag{$\heartsuit$}$$

Nierówność ($\heartsuit$) jest równoważna nierówności

$$\frac{\left(n+\frac{2}{3}\right)}{(n+1)}\cdot\frac{\left(n+\frac{4}{3}\right)}{\left(n+\frac{3}{2}\right)}\leqslant 1\,,$$

w której po lewej stronie występuje iloczyn dwóch ułamków mniejszych od 1 (licznik mniejszy od mianownika, oba dodatnie). Tak więc jest to nierówność prawdziwa.

Kto nie dostrzeże tego rozumowania, będzie pracowicie przekształcał nierówność ($\heartsuit$) do postaci równoważnych:

$$\frac{(3n+2)\cdot(3n+4)}{(n+1)\cdot(2n+3)} \leqslant \frac{9}{2}\,,$$

$$2\cdot(3n+2)\cdot(3n+4) \leqslant 9\cdot(n+1)\cdot(2n+3)\,,$$

$$18n^2+36n+16 \leqslant 18n^2+45n+27\,,$$

$$0 \leqslant 11n+9$$

i w tym momencie wywnioskuje, że nierówność ($\heartsuit$) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Tym samym udowodniliśmy, że dla każdej liczby naturalnej n z nierówności ($\clubsuit$) wynika nierówność ($\diamondsuit$).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.

638. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n} \geqslant \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}\,.$$

Rozwiązanie:
Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ mamy

$$L=\binom{2}{1}=2$$

oraz

$$P=\frac{2^1}{\sqrt{1}}=2\,.$$

Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $2 \geqslant 2$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{2n}{n} \geqslant \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}\,. \tag{1}$$

Wykażemy, że wówczas zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n+1} \geqslant \frac{2^{2n+1}}{\sqrt{n+1}}\,. \tag{2}$$

Zauważmy najpierw, że lewą stronę nierówności (1) można zapisać jako

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\cdot n!}\,.$$

Przekształcając lewą stronę nierówności (2) i korzystając z założenia indukcyjnego (1) otrzymujemy

$$L=\binom{2n+2}{n+1}=\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\cdot(n+1)!}=\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}\cdot\frac{(2n+1)\cdot(2n+2)}{(n+1)\cdot(n+1)}=\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}\cdot\frac{2\cdot(2n+1)}{n+1}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2\cdot(2n+1)}{n+1}\geqslant\frac{2^{2n+1}}{\sqrt{n+1}}=P\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2\cdot(2n+1)}{n+1}\geqslant\frac{2^{2n+1}}{\sqrt{n+1}}\,. \qquad (3)$$

Nierówność (3) jest równoważna kolejnym nierównościom

$$\frac{2n+1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}\geqslant 2\,,$$

$$2n+1\geqslant 2\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}\,,$$

$$(2n+1)^2\geqslant 4\cdot n\cdot(n+1)\,,$$

$$4n^2+4n+1\geqslant 4n^2+4n\,,$$

$$1\geqslant 0\,,$$

a zatem nierówność (3) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Tym samym udowodniliśmy, że dla każdej liczby naturalnej n z nierówności (1) wynika nierówność (2).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.

639. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\frac{(2n)!}{n!\cdot(n+1)!}\leqslant 4^{n-1}\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ mamy

$$L=\frac{2!}{1!\cdot 2!}=1$$

oraz

$$P=4^0=1\,.$$

Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $1\leqslant 1$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że
$$\frac{(2n)!}{n!\cdot(n+1)!}\leqslant 4^{n-1}\,. \qquad (\clubsuit)$$
Wykażemy, że wówczas zachodzi nierówność
$$\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\cdot(n+2)!}\leqslant 4^{n}\,. \qquad (\diamondsuit)$$

Przekształcając lewą stronę nierówności ($\diamondsuit$) i korzystając z założenia indukcyjnego ($\clubsuit$) otrzymujemy
$$L=\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\cdot(n+2)!}=\frac{(2n)!}{n!\cdot(n+1)!}\cdot\frac{(2n+1)\cdot(2n+2)}{(n+1)\cdot(n+2)}\leqslant$$
$$\leqslant 4^{n-1}\cdot\frac{2\cdot(2n+1)}{n+2}\leqslant 4^{n-1}\cdot 4=4^n=P\,,$$
o ile udowodnimy, że
$$\frac{2\cdot(2n+1)}{n+2}\leqslant 4\,. \qquad (\heartsuit)$$
Nierówność ($\heartsuit$) jest równoważna kolejnym nierównościom
$$2n+1\leqslant 2\cdot(n+2)\,,$$
$$2n+1\leqslant 2n+4\,,$$
$$1\leqslant 4\,,$$
a zatem nierówność ($\heartsuit$) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Tym samym udowodniliśmy, że dla każdej liczby naturalnej n z nierówności ($\clubsuit$) wynika nierówność ($\diamondsuit$).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.

Sposób II:

Zauważmy, że lewa strona dowodzonej nierówności może być zapisana w postaci $\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$.
Ponieważ liczba $\binom{2n}{n}$ występuje w $2n$-tym wierszu trójkąta Pascala, jest ona mniejsza od sumy wszystkich liczb występujących w tym wierszu, czyli od 2^{2n}.

W konsekwencji dla $n\geqslant 3$ dowodzona nierówność wynika z następującego ciągu nierówności:
$$\frac{(2n)!}{n!\cdot(n+1)!}=\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}<\frac{4^n}{n+1}\leqslant\frac{4^n}{3+1}=4^{n-1}\,.$$

Natomiast dla $n=1$ i $n=2$ sprawdzamy bezpośrednio, że dana w zadaniu nierówność przyjmuje odpowiednio postać $1\leqslant 1$ i $2\leqslant 4$.

640. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności
$$\frac{2}{3}\cdot n\cdot\sqrt{n+1} \;<\; \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{n-1}+\sqrt{n} \;<\; \frac{2}{3}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1)\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ dowodzone nierówności przyjmują postać
$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2} \;<\; 1 \;<\; \frac{2}{3}\cdot 2\,,$$
wystarczy więc zauważyć, że
$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}}<1$$
oraz
$$\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{4}{3}>1\,.$$

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że prawdziwe są nierówności
$$\frac{2}{3}\cdot n\cdot\sqrt{n+1} \;<\; \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{n-1}+\sqrt{n} \;<\; \frac{2}{3}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1)\,. \qquad (\clubsuit)$$
Udowodnimy, że wówczas analogiczne nierówności są prawdziwe po zastąpieniu liczby n liczbą $n+1$, a mianowicie
$$\frac{2}{3}\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+2} \;<\; \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \;<\; \frac{2}{3}\cdot\sqrt{n+1}\cdot(n+2)\,. \quad (\diamondsuit)$$
W celu dowodu lewej nierówności $(\diamondsuit)$ skorzystamy z lewej nierówności założenia indukcyjnego $(\clubsuit)$. Otrzymujemy
$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}>\frac{2}{3}\cdot n\cdot\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}\,,$$
a więc do zakończenia dowodu lewej nierówności $(\diamondsuit)$ wystarczy dowieść, że
$$\frac{2}{3}\cdot n\cdot\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}\geqslant\frac{2}{3}\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+2}\,. \qquad (\spadesuit)$$
Przekształcanie nierówności $(\spadesuit)$ prowadzi kolejno do nierówności równoważnych:
$$\frac{2}{3}\cdot n\cdot\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}\geqslant\frac{2}{3}\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+2}\,, \qquad \Big|:\sqrt{n+1}$$
$$\frac{2}{3}\cdot n+1\geqslant\frac{2}{3}\cdot\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)}\,,$$
$$n+\frac{3}{2}\geqslant\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)}\,,$$
$$\frac{(n+1)+(n+2)}{2}\geqslant\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)}\,,$$
a ta nierówność jest prawdziwa jako nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną liczb $n+1$ i $n+2$.

Analogicznie postępujemy dla dowodu prawej nierówności ($\diamondsuit$). Korzystając z prawej nierówności założenia indukcyjnego ($\clubsuit$) otrzymujemy

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1)+\sqrt{n+1}\,,$$

a więc do zakończenia dowodu prawej nierówności ($\diamondsuit$) wystarczy dowieść, że

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1)+\sqrt{n+1}\leqslant\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n+1}\cdot(n+2)\,. \qquad (\spadesuit\spadesuit)$$

Przekształcanie nierówności ($\spadesuit\spadesuit$) prowadzi kolejno do nierówności równoważnych:

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1)+\sqrt{n+1}\leqslant\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n+1}\cdot(n+2)\,, \qquad \Big| :\sqrt{n+1}$$

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n\cdot(n+1)}+1\leqslant\frac{2}{3}\cdot(n+2)\,,$$

$$\sqrt{n\cdot(n+1)}+\frac{3}{2}\leqslant n+2\,,$$

$$\sqrt{n\cdot(n+1)}\leqslant n+\frac{1}{2}\,,$$

$$\sqrt{n\cdot(n+1)}\leqslant\frac{n+(n+1)}{2}\,,$$

a ta nierówność jest prawdziwa jako nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb n i $n+1$.

Na mocy zasady indukcji matematycznej dane w zadaniu nierówności zostały udowodnione dla każdej liczby naturalnej n.