631. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$2^{61}\cdot n\leqslant 2^n+15\cdot 2^{63}\,.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n\leqslant 60$.

Dla $n\leqslant 60$ zachodzą nierówności
$$2^{61}\cdot n\leqslant 2^{61}\cdot 60=2^{63}\cdot 15<2^n+15\cdot 2^{63}\,,$$
skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n\geqslant 61$.
Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=61$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:
$$L=2^{61}\cdot 61\,,$$
$$P=2^{61}+15\cdot 2^{63}=2^{61}+15\cdot 4\cdot 2^{61}=61\cdot 2^{61}\,,$$
skąd $L=P$.

2° Niech $n\geqslant 61$ będzie taką liczbą naturalną, że
$$2^{61}\cdot n\leqslant 2^n+15\cdot 2^{63}\,.$$
W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność
$$2^{61}\cdot (n+1)\leqslant 2^{n+1}+15\cdot 2^{63}\,.$$
Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n\geqslant 61$ otrzymujemy
$$L=2^{61}\cdot (n+1)=2^{61}\cdot n+2^{61}\leqslant 2^n+15\cdot 2^{63}+2^{61}\leqslant 2^n+15\cdot 2^{63}+2^n=2^{n+1}+15\cdot 2^{63}=P\,,$$
co kończy dowód indukcyjny.

632. Obliczyć granicę ciągu:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{}{(n+6)^2}\right)\,.$$
Uwaga: W ostatnim składniku sumy brakuje licznika. Jego uzupełnienie jest częścią zadania.

Rozwiązanie:

Patrząc na mianowniki widzimy, że suma składa się z $12n+36$ składników, wobec czego zadanie polega na obliczeniu granicy
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{12n+36}{(n+6)^2}\right)\,.$$
Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \frac{3}{n^2+3} + \frac{4}{n^2+4} + \ldots + \frac{12n+36}{(n+6)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1+2+3+4+\ldots+(12n+36)}{n^2+0} = \frac{1+2+3+4+\ldots+(12n+36)}{n^2} = c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \frac{3}{n^2+3} + \frac{4}{n^2+4} + \ldots + \frac{12n+36}{(n+6)^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1+2+3+4+\ldots+(12n+36)}{(n+6)^2} = a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$1+2+3+4+\ldots+(12n+36) = \frac{(12n+36)\cdot(12n+37)}{2} = (6n+18)\cdot(12n+37)\,.$$

Wobec tego

$$c_n = \frac{(6n+18)\cdot(12n+37)}{n^2} \to 72$$

przy $n\to\infty$. Podobnie

$$a_n = \frac{(6n+18)\cdot(12n+37)}{(n+6)^2} \to 72$$

przy $n\to\infty$.

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 72$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 72\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 72\,.$$

Odpowiedź: Granica podana w treści zadania ma wartość 72.

633. Niech

$$f(x)=\sqrt{x}-50\cdot\ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $f(39999)$ jest mniejsza czy większa od $f(40000)-\dfrac{1}{800}$.

Wskazówka: Obie liczby są w przybliżeniu równe -329.83, a różnią się o około $6.51\cdot10^{-14}$. Nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{50}{x}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{50}{x^2}=\frac{-\sqrt{x}+200}{4\cdot x^2}>0$$

dla $x<40000$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,\,40000]$.

Zatem wykres funkcji f dla $x<40000$ leży powyżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 40000. Ponieważ $f'(40000)=1/800$, dla $x<40000$ zachodzi nierówność

$$f(x)>f(40000)+\frac{1}{800}\cdot(x-40000)$$

i w konsekwencji

$$f(39999)>f(40000)-\frac{1}{800}\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(39999)$ jest większa od $f(40000)-\dfrac{1}{800}$.

634. Niech

$$f(x)=\sqrt{x}-50\cdot\ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $f(40001)$ jest mniejsza czy większa od $f(40000)+\dfrac{1}{800}$.

Wskazówka: Obie liczby są w przybliżeniu równe -329.83, a różnią się o około $6.51\cdot10^{-14}$. Nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{50}{x}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{50}{x^2}=\frac{-\sqrt{x}+200}{4\cdot x^2}<0$$

dla $x>40000$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $[40000,\,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>40000$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 40000. Ponieważ $f'(40000)=1/800$, dla $x>40000$ zachodzi nierówność

$$f(x)<f(40000)+\frac{1}{800}\cdot(x-40000)$$

i w konsekwencji

$$f(40001) < f(40000) + \frac{1}{800}\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(40001)$ jest mniejsza od $f(40000)+\frac{1}{800}$.

635. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = 6\cdot\ln\left(x^2+1\right) - 5\cdot\mathrm{arctg}x\,.$$

Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią C, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant C\cdot|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Pominąwszy trywialny przypadek $x=y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)| = |x-y|\cdot|f'(c)|\,,$$

gdzie c leży pomiędzy x i y.

Zatem najmniejsza stała C, z którą prawdziwa jest nierówność podana w treści zadania, jest równa kresowi górnemu zbioru $\{|f'(x)| : x\in\mathbb{R}\}$.

Obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x) = \frac{12\cdot x-5}{x^2+1}\,.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{12\cdot x-5}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{12\cdot x^{-1}-5\cdot x^{-2}}{1+x^{-2}} = 0\,.$$

Ponadto

$$f''(x) = \frac{12\cdot(x^2+1)-2\cdot x\cdot(12\cdot x-5)}{(x^2+1)^2} = \frac{-12\cdot x^2+10\cdot x+12}{(x^2+1)^2}\,.$$

Rozwiązujemy równanie na zerowanie się f'':

$$-12\cdot x^2+10\cdot x+12=0\,,$$

$$6\cdot x^2-5\cdot x-6=0\,,$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{169}}{12}=\frac{5\pm 13}{12}\,,$$

skąd $x=3/2$ lub $x=-2/3$.

Wyliczamy wartości funkcji f' w miejscach zerowych jej pochodnej:

$$f'(3/2)=4$$

oraz

$$f'(-2/3)=-9\,.$$

Stąd wynika, że funkcja f' przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio -9 i 4, a zatem $C=9$.

636. Wyznaczyć takie liczby rzeczywiste p i A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{px}-p\cdot e^x+1}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tych wartości parametrów p i A.

Rozwiązanie:

Sposób I:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{ph}-p\cdot e^h+1}{h^2}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{ph}-p\cdot e^h+1-Ah^2}{h^3}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{2-p}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $p=2$. Wówczas możemy zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-2\cdot e^h+1-Ah^2}{h^3}\stackrel{\text{d'H}}{=}\frac{2e^{2h}-2\cdot e^h-2Ah}{3h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{4e^{2h}-2\cdot e^h-2A}{6h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{2-2A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=1$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{8e^{2h}-2\cdot e^h}{6}=\frac{6}{6}=1\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $p=2$, $A=1$ i wówczas $f'(0)=1$.

Sposób II:

Ze wzoru Taylora wynika istnienie takiej funkcji gładkiej g, że dla każdego x zachodzi równość:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+x^5\cdot g(x)\,.$$

Wówczas dla $x\neq 0$ mamy:

$$f(x)=\frac{e^{px}-p\cdot e^x+1}{x^2}=$$

$$=\frac{1+px+\frac{p^2x^2}{2}+\frac{p^3x^3}{6}+\frac{p^4x^4}{24}+p^5x^5\cdot g(px)-p-px-\frac{px^2}{2}-\frac{px^3}{6}-\frac{px^4}{24}-px^5\cdot g(x)+1}{x^2}=$$

$$=\frac{2-p}{x^2}+\frac{p^2-p}{2}+\frac{(p^3-p)\cdot x}{6}+\frac{(p^4-p)\cdot x^2}{24}+p^5x^3\cdot g(px)-px^3\cdot g(x)\,.$$

Wobec tego $p=2$, bo w przeciwnym razie funkcja f ma osobliwość w zerze. Wówczas

$$f(x)=1+x+\frac{7\cdot x^2}{12}+32x^3\cdot g(2x)-2x^3\cdot g(x)\,.$$

Stąd $A=1$ i wówczas $f'(0)=1$. Prawie za darmo dostajemy także $f''(0)=7/6$.