Warunki na ekstrema.

Wiemy już, że dla funkcji różniczkowalnej na przedziale otwartym[1] zerowanie się pochodnej w jakimś punkcie jest warunkiem koniecznym istnienia ekstremum[2] w tym punkcie. Innymi słowy, tam gdzie funkcja ma pochodną różną od zera, tam nie ma ekstremum.

Zerowanie się pochodnej nie rozstrzyga jednak, czy i jakie ekstremum ma funkcja. Odpowiedź na to pytanie można uzyskać na podstawie drugiej pochodnej[3]. Wzór Taylora mówi bowiem, że wielomianem stopnia co najwyżej drugiego najlepiej przybliżającym funkcję f w pobliżu punktu x_0 jest wielomian

$$f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2}{2},$$

co w obliczu założenia $f'(x_0)=0$ sprowadza się do

$$f(x_0)+\frac{f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2}{2}.$$

Zachowanie się powyższego wyrażenia w pobliżu x_0 zależy od znaku współczynnika przy $(x-x_0)^2$, czyli od znaku $f''(x_0)$.

Jeżeli $f''(x_0)>0$, to funkcja f ma w punkcie x_0 minimum[4].

Jeśli zaś $f''(x_0)<0$, to funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum[5].

Natomiast w przypadku $f''(x_0)=0$ do głosu dochodzą dalsze pochodne funkcji f. Rozważmy więc przybliżenie funkcji f wielomianem stopnia co najwyżej trzeciego, czyli

$$f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2}{2}+\frac{f'''(x_0)\cdot(x-x_0)^3}{6},$$

co wobec $f'(x_0)=f''(x_0)=0$ przyjmuje postać

$$f(x_0)+\frac{f'''(x_0)\cdot(x-x_0)^3}{6}.$$

Jeżeli $f'''(x_0)\neq 0$, to funkcja f nie ma w x_0 ekstremum[6].

Gdy jednak $f'''(x_0)=0$, to zabawę możemy kontynuować z pomocą wielomianu stopnia co najwyżej czwartego

$$f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2}{2}+\frac{f'''(x_0)\cdot(x-x_0)^3}{6}+\frac{f^{(4)}(x_0)\cdot(x-x_0)^4}{24},$$

co w przypadku $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=0$ przyjmuje postać

$$f(x_0)+\frac{f^{(4)}(x_0)\cdot(x-x_0)^4}{24}.$$

Jeśli teraz $f^{(4)}(x_0)>0$, to funkcja f ma w punkcie x_0 minimum[7].

A jeżeli $f^{(4)}(x_0)<0$, to funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum[8].

---

[1]Czyli na dziedzinie bez dziur i bez końców.

[2]Czyli lokalnego minimum lub maksimum.

[3]Zakładamy, że funkcja ma tyle pochodnych, ile będziemy chcieli użyć.

[4]Modelowy przykład: $f(x)=x^2$, $x_0=0$.

[5]Modelowy przykład: $f(x)=-x^2$, $x_0=0$.

[6]Modelowe przykłady: $f(x)=\pm x^3$, $x_0=0$.

[7]Modelowy przykład: $f(x)=x^4$, $x_0=0$.

[8]Modelowy przykład: $f(x)=-x^4$, $x_0=0$.

I tak dalej...

W rezultacie dla funkcji mającej w punkcie x_0 tyle pochodnych, ile nam potrzeba, otrzymujemy następującą procedurę rozstrzygania, czy w x_0 jest ekstremum i jakie:

Niech k będzie najmniejszą taką liczbą całkowitą dodatnią, że $f^{(k)}(x_0) \neq 0$.

- Jeżeli liczba k jest nieparzysta, to f nie ma ekstremum w x_0.
- Jeżeli k jest parzyste oraz $f^{(k)}(x_0) > 0$, to f ma w x_0 minimum.
- Jeżeli k jest parzyste oraz $f^{(k)}(x_0) < 0$, to f ma w x_0 maksimum.

A co będzie, kiedy dla każdej liczby naturalnej k zachodzi $f^{(k)}(x_0) = 0$, czyli f ma w x_0 pochodne wszystkich rzędów równe 0?

MIT: Wtedy funkcja f jest stała, przynajmniej w pobliżu x_0.

FAKT: Nieprawda. Funkcja f może się zachowywać jakkolwiek, na przykład:

Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem[9]

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

ma w zerze[10] wszystkie pochodne równe 0 i ma w zerze minimum właściwe.

Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -e^{-1/x^2} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

ma w zerze wszystkie pochodne równe 0 i ma w zerze maksimum właściwe.

Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -e^{-1/x^2} & \text{dla} \quad x < 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

ma w zerze wszystkie pochodne równe 0 i jest ściśle rosnąca, a więc nie ma esktremów.

[9] Jest to przykład 6 z wykładu 35, strona 422.

[10] Czyli $x_0 = 0$.

Różne postacie reszty wzoru Taylora.

Dotąd poznaliśmy jedną postać reszty wzoru Taylora, a mianowicie[11]

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+t_x(x-x_0))}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}\,, \qquad t_x\in(0,\,1)\,.$$

Jej zaletą jest to, że wiedząc coś o zakresie zmienności pochodnej $f^{(n+1)}$, jesteśmy w stanie uzyskać konkretne oszacowanie wielkości $R_n(x)$, a tym samym oszacowanie błędu, z jakim funkcja f jest przybliżana przez wielomian w pobliżu x_0.

Wadą jest niemożność szacowania pochodnych reszty $R_n(x)$, gdyż wobec dowolności i potencjalnej chaotyczności wyboru t_x nie możemy mieć nawet pewności, że powyższy wzór dający $R_n(x)$ definiuje funkcję ciągłą. Więc o różniczkowalności i kontrolowaniu pochodnych nie mamy nawet co marzyć.

Chciałoby się jednak napisać

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\ldots \tag{$*$}$$

i uznać, że w miejscu trzech kropek znajduje się coś, co w rachunkach okazuje się mniej istotne niż jednomiany, które powyżej wypisaliśmy. Mniej istotne nie tylko jeśli chodzi o wielkość, ale także pozostaje mniej istotne przy różniczkowaniu. Wzór Taylora daje nam wielomian, w którym zakodowane są pochodne funkcji w x_0 do rzędu n włącznie. Chielibyśmy takim wielomianem operować i uzyskiwać zakodowane pochodne funkcji uzyskanych z danej funkcji przez proste operacje.

Na przykład chcielibyśmy do wzoru $(*)$ podstawić x^2 w miejsce x i otrzymać

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{24}+\frac{x^{10}}{120}+\ldots,$$

a następnie uznać, że możemy odczytać z powyższego wzoru pochodne[12] funkcji $f(x)=e^{x^2}$ w zerze[13]. W tym celu trzeba byłoby wiedzieć, że to, co kryje się pod trzema kropkami nie będzie miało wpływu na obliczenia dotyczące pochodnych niskich rzędów.

Ponieważ funkcje, do których chcielibyśmy stosować wzór Taylora, zazwyczaj są gładkie[14], nie będziemy się bawić w śrubowanie założeń i przyjmiemy, że funkcja f jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w otoczeniu[15] punktu x_0.

Możemy więc odnotować, że $R_n(x)$ jest jakąś funkcją gładką o zerowej wartości i zerowych pochodnych do rzędu n w x_0:

$$R_n^{(k)}(x_0)=0 \qquad \text{dla} \qquad k=0,1,2,3,\ldots,n\,.$$

[11] Jest to reszta w postaci Lagrange'a.

[12] Do rzędu 10 lub 11, bo taki kawałek wielomianu widzimy, w zależności od tego, czy mamy świadomość, że przed trzema kropkami występuje niewodoczny jednomian $0\cdot x^{11}$.

[13] Podanie wzoru na n-tą pochodną funkcji $f(x)=e^{x^2}$ jest trudnym zadaniem, dlatego zadowolimy się pochodnymi w zerze.

[14] Czyli klasy C^∞, czyli mają ciągłe pochodne wszystkich rzędów, przynajmniej w jakimś otoczeniu x_0.

[15] Czyli jakimś przedziale postaci $(x_0-\delta,\,x_0+\delta)$.

Z pozoru wydaje się, że takie stwierdzenie nie zawiera nic szczególnie mądrego, bo skoro

$$R_n(x) = f(x) - W_n(x)\,,$$

gdzie $W_n(x)$ jest wielomianem[16] mającym taką samą wartość w x_0 i takie same pochodne do rzędu n w x_0, to odjęcie go od gładkiej funkcji f spowoduje w oczywisty sposób wyzerowanie wartości i pochodnych bez popsucia gładkości. Jednak możliwość umieszczenia we wzorze funkcji $R_n(x)$, która wedle naszego wyczucia powinna być bez znaczenia, pozwala bez machania rękami przeprowadzić odpowiednie rachunki[17].

Inna, pokrewna wersja brzmi:

$$R_n(x) = (x-x_0)^{n+1} \cdot g_n(x)\,,$$

gdzie g_n jest funkcją gładką. W tej wersji czynnik $(x-x_0)^{n+1}$ wymusza zerowanie wartości i pochodnych w x_0, a sama postać reszty z gładkim czynnikiem $g_n(x)$ czyni łatwiejszym manipulowanie odpowiednimi wzorami.

W tej wersji wzór Taylora można sformułować następująco:

Niech f będzie funkcją gładką w otoczeniu punktu x_0. Wówczas dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka funkcja g_n gładka w otoczeniu x_0, że dla każdego x odpowiednio bliskiego[18] x_0 zachodzi równość

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + (x-x_0)^{n+1} \cdot g_n(x)\,.$$

Powyższa wersja zupełnie nie nadaje się do jakichkolwiek konkretnych szacowań, gdyż występuje w niej funkcja g_n, na której wartości nie mamy żadnego oszacowania. Jednak jest ona idealna do precyzyjnych rachunków uwzględniających wielomian ze wzoru Taylora oraz kontrolowania sytuacji, w których reszta wzoru Taylora nie wpływa na pochodne niskich rzędów.

Dziesiejszy wykład zakończę przykładem zastosowania powyższego wariantu wzoru Taylora do znajdowania pochodnych wysokiego rzędu w pojedynczym punkcie.

---

[16] Jest to wielomian będący częścią wzoru Taylora:

$$W_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k$$

[17] W drugim semestrze poznamy szeregi potęgowe, co da jeszcze inną teoretyczną podstawę do przeprowadzania tego typu rachunków.

[18] Sformułowanie "Dla każdego x odpowiednio bliskiego x_0 ..." można sformalizować jako:
Istnieje takie $\delta > 0$, że dla każdego $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ ...

591. Niech $f(x)=e^{x^2}$. Obliczyć $f^{(2020)}(0)$.

Rozwiązanie:

Ze wzoru Taylora wynika istnienie takiej funkcji[19] gładkiej g, że

$$e^x=\sum_{k=0}^{1010}\frac{x^k}{k!}+x^{1011}\cdot g(x)\,.$$

Wobec tego

$$f(x)=e^{x^2}=\sum_{k=0}^{1010}\frac{x^{2k}}{k!}+x^{2022}\cdot g\left(x^2\right)$$

i w konsekwencji[20]

$$f^{(2020)}(x)=\frac{2020!}{1010!}+\frac{d^{2020}}{dx^{2020}}\left(x^{2022}\cdot g\left(x^2\right)\right)\,.$$

Zatem[21]

$$f^{(2020)}(0)=\frac{2020!}{1010!}\,.$$

---

[19]Zgodnie z przyjętymi wyżej oznaczniami funkcja ta powinna się nazywać g_{1010}, ale dla prostoty zapisu oznaczę ją "gołym" g.

[20]Ponieważ

$$\sum_{k=0}^{1010}\frac{x^{2k}}{k!}=\sum_{k=0}^{1009}\frac{x^{2k}}{k!}+\frac{x^{2020}}{1010!}\,,$$

a suma występująca po prawej stronie jest wielomianem stopnia 2018 (a więc mającym zerową pochodną rzędu 2020), 2020-ta pochodna jest pochodną ostatniego składnika, co wobec wzoru

$$\frac{d^n}{dx^n}x^n=n!$$

daje

$$\frac{d^{2020}}{dx^{2020}}\sum_{k=0}^{1010}\frac{x^{2k}}{k!}=\frac{d^{2020}}{dx^{2020}}\sum_{k=0}^{1009}\frac{x^{2k}}{k!}+\frac{d^{2020}}{dx^{2020}}\frac{x^{2020}}{1010!}=\frac{2020!}{1010!}\,.$$

[21]Wobec równości

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\cdot h(x)\right)=x^{n-1}\cdot\left(n\cdot h(x)+x\cdot h'(x)\right)$$

przez indukcję możemy udowodnić, że dla $k<n$ istnieje taka funkcja h_k, że

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(x^n\cdot h(x)\right)=x^{n-k}\cdot h_k(x)\,,$$

a to ma w zerze wartość zero. Stąd wniosek, że dla gładkiej funkcji h oraz $k<n$ zachodzi

$$\left.\frac{d^k}{dx^k}\left(x^n\cdot h(x)\right)\right|_{x=0}=0\,,$$

gdzie przez $\left.F(x)\right|_{x=a}$ rozumiemy $F(a)$.