Wzór Taylora.

Rozważmy funkcję wielomianową

$$W(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ldots+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0=\sum_{i=0}^{n}a_i\cdot x^i\,.$$

Jej pochodna k-tego rzędu również jest wielomianem, a konkretnie

$$W^{(k)}(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i\cdot i\cdot(i-1)\cdot(i-2)\cdot\ldots\cdot(i-k+2)\cdot(i-k+1)\cdot x^{i-k}=$$

$$=\sum_{i=k}^{n}a_i\cdot i\cdot(i-1)\cdot(i-2)\cdot\ldots\cdot(i-k+2)\cdot(i-k+1)\cdot x^{i-k}=\sum_{i=k}^{n}\frac{a_i\cdot i!}{(i-k)!}\cdot x^{i-k}=\sum_{i=0}^{n-k}\frac{a_{i+k}\cdot(i+k)!}{i!}\cdot x^i\,.$$

W szczególności pochodne rzędów większych[1] od n są funkcjami stałymi równymi zero.

Zauważmy, że dla $0\leqslant k\leqslant n$ pochodna k-tego rzędu[2] rozważanej funkcji wielomianowej w zerze zależy tylko od współczynnika a_k, a dokładniej

$$W^{(k)}(0)=a_k\cdot k!\,.$$

To oznacza, że jeśli dana[3] jest funkcja, o której wiemy, że jest wielomianem stopnia co najwyżej n, ale nie mamy podanych współczynników tego wielomianu, to jesteśmy w stanie odtworzyć[4] te współczynniki na podstawie pochodnych funkcji w zerze:

$$a_k=\frac{W^{(k)}(0)}{k!}\,.$$

To oznacza, że sam wielomian możemy zapisać w postaci

$$W(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot x^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{W^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k=$$

$$=W(0)+W'(0)\cdot x+\frac{W''(0)\cdot x^2}{2}+\frac{W'''(0)\cdot x^3}{6}+\frac{W^{(4)}(0)\cdot x^4}{24}+\ldots+\frac{W^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!}\,.$$

---

[1] Dla $k>n$ ostatnia suma ma postać

$$\sum_{i=0}^{\substack{\text{coś}\\ \text{ujemnego}}}\frac{a_{i+k}\cdot(i+k)!}{i!}\cdot x^i\,,$$

co wymaga doprecyzowania, że w sumie

$$\sum_{i=a}^{b}\Phi(i)$$

sumowanie obejmuje wszystkie indeksy i spełniające nierówności $a\leqslant i\leqslant b$. Ponieważ w przypadku $a>b$ takich i nie ma, suma ma 0 składników i ma wartość 0.

[2] Tutaj po raz pierwszy mamy realną potrzebę skorzystania z umowy, że funkcja jest swoją pochodną rzędu 0.

[3] Dana w tym sensie, że dla każdego argumentu jest jakoś określona jej wartość.

[4] Oczywiście mając funkcję i wiedząc, że jest ona wielomianem stopnia co najwyżej n, możemy też odtworzyć współczynniki na podstawie wartości funkcji w $n+1$ punktach, co wymaga rozwiązania układu $n+1$ równań liniowych z $n+1$ niewiadomymi. Ale można też sprytniej (wielomian interpolacyjny Lagrange'a). To jest ciekawe zagadnienie prowadzące do wielomianowych interpolacji funkcji, ale w tej chwili nie leży ono w sferze naszych zainteresowań.

Powyższe rozważania można powtórzyć wychodząc od wielomianu zapisanego w nietypowej formie[5]

$$W(x)=a_n\cdot(x-x_0)^n+a_{n-1}\cdot(x-x_0)^{n-1}+a_{n-2}\cdot(x-x_0)^{n-2}+\ldots+a_2\cdot(x-x_0)^2+a_1\cdot(x-x_0)+a_0=$$
$$=\sum_{i=0}^{n} a_i\cdot(x-x_0)^i\,.$$

Wówczas zamiast pochodnych w zerze otrzymamy pochodne w punkcie x_0, ale poza tym wszystko się przeniesie prowadząc do następującego finału:

$$W(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k\cdot(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{W^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k=W(x_0)+W'(x_0)\cdot(x-x_0)+$$
$$+\frac{W''(x_0)\cdot(x-x_0)^2}{2}+\frac{W'''(x_0)\cdot(x-x_0)^3}{6}+\frac{W^{(4)}(x_0)\cdot(x-x_0)^4}{24}+\ldots+\frac{W^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!}\,.$$

Powyższy wzór odtwarza wielomian na podstawie jego pochodnych w punkcie x_0.

Zastosowanie powyższej procedury do funkcji nie wymaga, aby była ona wielomianem. Wystarczy, aby miała w punkcie x_0 pochodne aż do rzędu n. Tyle tylko, że jeśli nie jest ona wielomianem, to nie jest równa wielomianowi, który na podstawie powyższego wzoru otrzymujemy.

Jednak wielomian ten najlepiej spośród wszystkich wielomianów stopnia co najwyżej n przybliża rozważaną funkcję w pobliżu x_0. Jest to też jedyny wielomian, który w x_0 ma takie same pochodne aż do rzędu n jak rozważana funkcja.

Tak więc dla funkcji f określonej w pobliżu x_0 i mającej w punkcie x_0 pochodne do rzędu n, możemy zapisać

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k+R_n(x)\,,$$

gdzie[6]

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k\,.$$

Póki co nie ma w tym wiele mądrego, bo każde dwie wielkości można powiązać wzorem[7], w którym występuje bliżej nieokreślony składnik. Cała zabawa polega więc na tym, aby możliwie najwięcej powiedzieć o tajemniczym składniku $R_n(x)$.

Otrzymany wzór

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k+R_n(x)$$

nazywamy **wzorem Taylora**, a samo $R_n(x)$ nazywamy resztą[8] wzoru Taylora.

[5]Zakładającej, że nie 0, ale x_0 jest pępkiem świata.

[6]Czasami można spotkać w literaturze w tym miejscu oznaczenie R_{n+1} zamiast R_n.

[7]Na przykład $2\cdot 2=7+R$ dla odpowiednio dobranego R.

[8]Lub dokładniej: n-tą resztą.

Powyższy[9] wzór będzie kompletnie bezwartościowy, jeśli nie będzie mu towarzyszyć twierdzenie w stylu: Jeśli funkcja f jest taka a taka, to $R_n(x)$ jest takie i siakie.

Wzór Taylora składa się więc faktycznie z dwóch elementów:
1° wzoru na wielomian[10], który najlepiej przybliża funkcję,
2° twierdzenia mówiącego, że przy określonych założeniach możemy powiedzieć coś ciekawego o reszcie wzoru Taylora.

Jedną z popularniejszych postaci reszty wzoru Taylora jest reszta w postaci Lagrange'a:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+t_x(x-x_0))}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}\,, \qquad t_x\in(0,\,1)\,.$$

Na pierwszy rzut oka wyglada ona jak $n+1$-szy składnik wielomianu występującego we wzorze Taylora, ale w argumencie $f^{(n+1)}$ nie występuje punkt x_0, ale punkt pomiędzy x_0 i x. Założenia o funkcji f, jakie są tu potrzebne, to istnienie $n+1$-szej pochodnej funkcji f na przedziale $[x_0,\,x]$ lub $[x,\,x_0]$.

Oczywiście wyrażenie $f^{(n+1)}(x_0+t_x(x-x_0))$ ze względu na dowolność t_x nie daje nam możliwości, aby dokładnie kontrolować jego wartość. Jeśli jednak znamy górne i dolne oszacowania na $n+1$-szą pochodną, to tym samym znamy oszacowania na resztę wzoru Taylora. Wyrażenie to ma w zasadzie walor estetyczny, bo koniec końców w jego miejsce wstawiamy jakąś liczbę, o której nie wiemy nic więcej, niż to, że zawiera się między kresami[11] $n+1$-szej pochodnej.

Zatem wzór Taylora mówi, że dla funkcji f mającej $n+1$ pochodnych[12] na przedziale $[x_0,\,x]$ lub $[x,\,x_0]$ istnieje takie[13] $t_x\in(0,\,1)$, że

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(x_0+t_x(x-x_0))}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}\,.$$

Mniej estetyczna, ale za to mówiąca wprost, o co chodzi, wersja tego wzoru brzmi następująco:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k+\frac{???}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}\,,$$

gdzie w miejsce "???" należy wpisać coś pomiędzy kresem dolnym i kresem górnym $n+1$-szej pochodnej funkcji f na przedziale $[x_0,\,x]$ lub $[x,\,x_0]$.

[9] Zwykło się używać słowa "powyższy" także wtedy, gdy występuje ono na górze strony i odnosi się do wzoru na dole poprzedniej strony. Nie będę naruszał tej tradycji.

[10] Wzór ten mamy na dole poprzedniej strony.

[11] Kresami na przedziale $[x_0,\,x]$ lub $[x,\,x_0]$.

[12] Bardzo często po prostu zakłada się, że f jest klasy C^{n+1}, czyli ma ciągłą $n+1$-szą pochodną. Formalnie jest to założenie mocniejsze niż zakładanie tylko istnienia $n+1$-szej pochodnej, ale w praktyce rozważane funkcje są różniczkowalne o wiele więcej razy niż nam potrzeba, często mają nawet nieskończenie wiele pochodnych, więc nie ma sensu rozdzielać włosa na czworo przy śrubowaniu założeń.

[13] Na ogół pisze się w tym miejscu gołe t, bez żadnego indeksu, ale ja chcę na każdym kroku przypominać oznaczeniami, że t jest zależne od x.

Przykład 1: Oszacujemy liczbę $\sqrt{26}$. W tym celu skorzystamy ze wzoru Taylora dla funkcji $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=25$ oraz $n=2$.

Wyliczamy kolejne pochodne:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\,,$$
$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$
$$f'''(x)=\frac{3}{8\cdot x^{5/2}}\,.$$

Wobec tego wzór Taylora daje

$$\sqrt{26}=\sqrt{25}+(26-25)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{25}}-\frac{1}{2}\cdot(26-25)^2\cdot\frac{1}{4\cdot 25^{3/2}}+\frac{1}{6}\cdot(26-25)^3\cdot\frac{3}{8\cdot c^{5/2}}\,,$$

gdzie $c\in(25,\,26)$. Po uproszczeniu otrzymujemy kolejno

$$\sqrt{26}=5+\frac{1}{10}-\frac{1}{1000}+\frac{1}{16\cdot c^{5/2}}\,,$$
$$\sqrt{26}=5,099+\frac{1}{16\cdot c^{5/2}}\,.$$

Ponieważ $c>25$, otrzymujemy

$$\sqrt{26}=5,099+\frac{1}{16\cdot c^{5/2}}<5,099+\frac{1}{16\cdot 25^{5/2}}=5,099+\frac{1}{50\,000}=5,09902\,.$$

Z kolei nierówność $c<26$ można wykorzystać na różne sposoby[14]. Jedna z możliwości jest następująca:

$$c^{5/2}<26^{5/2}=\sqrt{26^5}=26^2\cdot\sqrt{26}<676\cdot\sqrt{36}=676\cdot 6<700\cdot 6=4200<5000\,.$$

To prowadzi do oszacowania

$$\sqrt{26}=5,099+\frac{1}{16\cdot c^{5/2}}>5,099+\frac{1}{16\cdot 5000}=5,099+\frac{1}{80\,000}=5,0990125>5,09901\,.$$

Wobec tego

$$5,09901<\sqrt{26}<5,09902\,.$$

Przykład 2: Liczba $\ln 3$ jest nieco większa od 1. Ale o ile większa? Spróbujmy ją oszacować stosując wzór Taylora do $f(x)=\ln x$, $x_0=1$ oraz $n=6$.

Kolejne pochodne funkcji f wyglądają następująco:

$$f'(x)=\frac{1}{x}\,,\qquad f''(x)=-\frac{1}{x^2}\,,$$
$$f'''(x)=\frac{2}{x^3}\,,\qquad f^{(4)}(x)=-\frac{6}{x^4}\,,$$
$$f^{(5)}(x)=\frac{24}{x^5}\,,\qquad f^{(6)}(x)=-\frac{120}{x^6}\,,$$
$$f^{(7)}(x)=\frac{720}{x^7}\,.$$

[14]Bo jest kwestią wyboru, jakich szacowań dokonamy, aby uzyskać zadowalający nas kompromis między dokładnością oszacowania a jego prostotą.

Wzór Taylora po uproszczeniu przybiera postać

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^5}{5}-\frac{(x-1)^6}{6}+\frac{(c-1)^7}{7}\,,$$

gdzie c leży pomiędzy 1 i x. Dla $x=3$ otrzymujemy

$$\ln 3=2-\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}-\frac{2^4}{4}+\frac{2^5}{5}-\frac{2^6}{6}+\frac{(c-1)^7}{7}=2-2+\frac{8}{3}-4+\frac{32}{5}-\frac{32}{3}+\frac{(c-1)^7}{7}=$$

$$=\frac{40-60+96-160}{15}+\frac{(c-1)^7}{7}=\frac{-84}{15}+\frac{(c-1)^7}{7}=-\frac{28}{5}+\frac{(c-1)^7}{7}=-5,6+\frac{(c-1)^7}{7}\,.$$

Ponieważ $c\in(1,\,3)$, otrzymujemy oszacowania

$$-\mathbf{5,6}<\ln 3<-5,6+\frac{128}{7}=\frac{-28}{5}+\frac{128}{7}=\frac{-196+640}{35}=\frac{444}{35}=12+\frac{24}{35}<12+\frac{24,5}{35}=\mathbf{12,7}\,.$$

Oszacowania te są bezużyteczne, gdyż nawet bez wzoru Taylora wiemy, że $1<\ln 3<2$. To pokazuje, że wzór Taylora nie da oczekiwanych efektów, jeżeli podnoszona do kolejnych potęg różnica $(x-x_0)$ jest zbyt duża[15].

Dużo poręczniej jest zapisywać wzór Taylora w zerze[16] po odpowiedniej modyfikacji funkcji, np. zamiast $\ln x$ rozważamy $\ln(1+x)$.

A oto jak wygląda wzór Taylora w zerze dla kilku wybranych funkcji:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^8}{8}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{n}+R_n(x)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\ldots+\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}+R_{2n+1}(x)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\ldots+\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n}(x)$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5\cdot x^4}{128}+\frac{7\cdot x^5}{256}-\frac{21\cdot x^6}{1024}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot(2n-3)!!\cdot x^n}{2^n\cdot n!}+R_n(x)$$

$$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5\cdot x^3}{81}-\frac{10\cdot x^4}{243}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot(3n-4)!!!\cdot x^n}{3^n\cdot n!}+R_n(x)$$

$$\sqrt[4]{1+x}=1+\frac{x}{4}-\frac{3\cdot x^2}{32}+\frac{7\cdot x^3}{128}-\frac{77\cdot x^4}{2048}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot(4n-5)!!!!\cdot x^n}{4^n\cdot n!}+R_n(x)$$

Przypomnijmy, że

$$(2n-3)!!=1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot\ldots\cdot(2n-7)\cdot(2n-5)\cdot(2n-3)$$

$$(3n-4)!!!=2\cdot5\cdot8\cdot11\cdot14\cdot\ldots\cdot(3n-10)\cdot(3n-7)\cdot(3n-4)$$

$$(4n-5)!!!!=3\cdot7\cdot11\cdot15\cdot19\cdot\ldots\cdot(4n-13)\cdot(4n-9)\cdot(4n-5)$$

[15] To jest bardzo pobieżny opis zjawiska, a przez to może być mylący. Dużo zależy też od rozmiaru pochodnych funkcji f, ale tym zajmiemy się w drugim semestrze.

[16] Czyli z $x_0=0$. Wówczas czasami nazywa się go wzorem Maclaurina.