Pochodne wyższych rzędów.

W podobny sposób jak uzyskaliśmy pochodne drugiego i trzeciego rzędu poprzez dwu- i trzykrotne różniczkowanie funkcji, możemy zdefiniować[1] pochodną dowolnego rzędu[2] naturalnego n jako efekt n-krotnego różniczkowania funkcji. Przy tym pochodne rzędu wyższego niż trzeci lub pochodne o rzędzie, który nie jest konkretną liczbą, zapisujemy w postaci $f^{(n)}$. Tak więc czwartą pochodną funkcji f zapiszemy[3] jako $f^{(4)}$.

Możemy więc przyjąć następującą definicję rekurencyjną

$$f^{(n+1)}=\left(f^{(n)}\right)'$$

lub w innym zapisie

$$\frac{d^{n+1}f(x)}{dx^{n+1}}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right).$$

W uzupełnieniu do tej definicji przyjmujemy, że funkcja jest swoją pochodną zerowego rzędu. Oczywiście pisanie $f^{(0)}$ zamiast f nie ma praktycznego sensu, ale użycie zapisu $f^{(n)}$ w kontekście n mogącego przyjmować wartość 0 będzie przez nas w przyszłości stosowane.

Aby dopełnić tej definicji, należy wyjaśnić kwestię pochodnych jednostronnych wysokiego rzędu.

Jeżeli funkcja f jest określona w punkcie x_0 i bezpośrednio na prawo od x_0, bądź też chcemy zignorować jej ewentualne wartości na lewo od x_0, to możemy zdefiniować rekurencyjnie pochodną prawostronną n-tego rzędu[4] w x_0: Do tej definicji używamy pochodnej prawostronnej niższego rzędu w x_0:

$$f^{(n+1)}(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x_0^+)}{x-x_0}.$$

Analogicznie definiujemy pochodną lewostronną n-tego rzędu[5]:

$$f^{(n+1)}(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x_0^-)}{x-x_0}.$$

Istnienie i równość obu pochodnych jednostronnych rzędu n funkcji f w punkcie x_0 **nie jest** warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia pochodnej rzędu n funkcji f w punkcie x_0.

Aby mogła istnieć pochodna rzędu n w x_0, muszą także istnieć wszystkie pochodne rzędów niższych od n w x_0 (zobacz wykład 34, str. 397–398).

[1]To, że je sobie zdefiniujemy, nie oznacza jeszcze, że dla każdej funkcji będą istniały.

[2]Możemy też powiedzieć: n-ta pochodna.

[3]Jeśli ktoś bardzo mocno chce zapisać takie pochodne w notacji prim-bis-ter, to nie zapisujemy tych pochodnych dodając kolejne primy, ale imitując zapis rzymski z małymi literami. Nie napiszemy więc f'''', ale f^{iv}, przy czym zapis taki jest na tyle rzadko stosowany, że nie ma ustalonych reguł co do ewentualnego stawiania kropki nad "i".

[4]Jeżeli ktoś nie boi się konfliktu plusa z ewentualnymi indeksami występujacymi w oznaczeniu funkcji, może stosować zapis $f_+^{(n)}(x_0)$.

[5]Tym razem zakładając, że funkcja f jest określona w punkcie x_0 i bezpośrednio na lewo od x_0. Być może jest też określona na prawo od x_0, ale chcemy zignorować jej wartości na prawo od x_0.

Jeżeli funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna, to jej n-ta pochodna $f^{(n)}$ może być nieciągła[6]. Jednak wówczas funkcja $f^{(n-1)}$ jest różniczkowalna, a więc jest ciągła. Często zakładając n-krotną różniczkowalność funkcji dokłada się jeszcze dodatkowe założenie, że n-ta pochodna jest ciągła.

Zbiór funkcji n-krotnie różniczkowalnych na przedziale[7] (a, b) i mających ciągłą n-tą pochodną[8] oznaczamy przez $C^n(a, b)$. Funkcje takie nazywamy funkcjami klasy C^n na przedziale (a, b). Możemy więc napisać krótko $f \in C^n(a, b)$ zamiast opisywać słowami, że f ma mieć na przedziale (a, b) ciągłe pochodne do rzędu n włącznie. Przez analogię $C(a, b)$ oznacza[9] zbiór funkcji ciągłych na przedziale (a, b). Z kolei $C^\infty(a, b)$ oznacza zbiór funkcji mających pochodne wszystkich rzędów[10] na przedziale (a, b).

Możemy też mówić o funkcjach klasy C^n na przedziale domkniętym[11] $[a, b]$ zakładając wówczas, że na końcach przedziału istnieją pochodne jednostronne i są one granicami odpowiednich pochodnych[12]. Stosujemy wówczas oznaczenie $C^n([a, b])$ lub $C^n[a, b]$.

Dla niektórych funkcji jesteśmy w stanie wyobrazić sobie jak wygląda ich wielokrotne różniczkowanie i wobec tego możemy od razu napisać wzór na n-tą pochodną. Czasami wzór taki można znaleźć po mniej lub bardziej finezyjnych rozważaniach. A czasami podanie wzoru na n-tą pochodną może nastręczać spore trudności.

Przyjrzyjmy się różnym tego typu przykładom.

Przykład 1: Niech funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = e^{5x}.$$

Różniczkowanie funkcji f sprowadza się do przemnożenia jej przez 5 i to samo dotyczy kolejnych pochodnych. Możemy więc stwierdzić, że

$$f^{(n)}(x) = 5^n \cdot e^{5x}.$$

[6] Ale musi mieć własność Darboux, jeśli jest określona na przedziale. A to dlatego, że jest pochodną funkcji $f^{(n-1)}$, a jak wiemy pochodna ma własność Darboux.

[7] Dopuszczamy $a = -\infty$ oraz $b = +\infty$.

[8] Mówimy czasem, że funkcje te są n-krotnie różniczkowalne w sposób ciągły.

[9] Czasami można spotkać oznaczenie $C^0(a, b)$.

[10] Funkcje takie nazywami gładkimi na przedziale (a, b). Ponieważ z istnienia pochodnej rzędu n wynika ciągłość pochodnej rzędu $n-1$, z istnienia pochodnych wszystkich rzędów wynika ich ciągłość.

[11] Ewentualnie domkniętym z jednej strony, a otwartym z drugiej.

[12] Innymi słowy: pochodne jednostronne na końcach zastępują pochodne i prowadzą do funkcji pochodnych ciągłych na przedziale domkniętym.

PRZYKŁAD 2: Niech funkcja $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem
$$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}\,.$$
Każdorazowe różniczkowanie funkcji f lub jej dalekiej pochodnej sprowadza się do obniżenia wykładnika przy iksie o 1 i przemnożenia całości przez stary wykładnik. Po n różniczkowaniach wykładnik spadnie o n, czyli do $-n-1$, natomiast wszystkie wykładniki, które pojawiały się po drodze (od -1 do $-n$) trzeba przemnożyć przez otrzymaną potęgę iksa. Wobec tego
$$f^{(n)}(x)=(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot\ldots\cdot(-n)\cdot x^{-n-1}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}}\,.$$

PRZYKŁAD 3: Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem
$$f(x)=x\cdot e^x\,.$$
Obliczamy kolejne pochodne:
$$f'(x)=e^x+x\cdot e^x\,,$$
$$f''(x)=2\cdot e^x+x\cdot e^x\,,$$
$$f'''(x)=3\cdot e^x+x\cdot e^x\,.$$
To pozwala wysnuć hipotezę:
$$f^{(n)}(x)=n\cdot e^x+x\cdot e^x\,.$$
Hipotezę tę dowodzimy indukcyjnie, co w wielkim skrócie wygląda następująco:
1° Dla $n=1$ się zgadza.
2° Jeżeli n jest taką liczbą, że hipoteza jest prawdziwa, to
$$f^{(n+1)}(x)=\frac{d}{dx}f^{(n)}(x)=\frac{d}{dx}\left(n\cdot e^x+x\cdot e^x\right)=(n+1)\cdot e^x+x\cdot e^x\,,$$
wobec czego hipoteza jest prawdziwa dla $n+1$.

PRZYKŁAD 4: Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem
$$f(x)=\sin^2 x\,.$$
Obliczamy kolejne pochodne:
$$f'(x)=2\cdot\sin x\cdot\cos x\,,$$
$$f''(x)=2\cdot\cos^2 x-2\cdot\sin^2 x\,,$$
$$f'''(x)=-8\cdot\sin x\cdot\cos x\,,$$
$$f^{(4)}(x)=-8\cdot\cos^2 x+8\cdot\sin^2 x\,.$$
Zauważamy, że począwszy od f' dwukrotne różniczkowanie sprowadza się do przemnożenia przez -4.

Wobec tego
$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}(-1)^{(n-1)/2}\cdot 2^n\cdot\sin x\cdot\cos x & \text{dla } n \text{ nieparzystych}\\ (-1)^{n/2}\cdot 2^{n-1}\cdot\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right) & \text{dla } n \text{ parzystych}\end{cases}$$

Inne rozwiązanie polega na zauważeniu, że

$$f'(x)=2\cdot\sin x\cdot\cos x=\sin 2x\,,$$

wobec czego kolejne różniczkowania sprowadzają się do cyklicznej zmiany funkcji trygonometrycznej (sin, cos, $-\sin$, $-\cos$) oraz przemożenia przez 2. Wobec tego

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}(-1)^{(n-1)/2}\cdot 2^{n-1}\cdot\sin 2x & \text{dla } n \text{ nieparzystych}\\ (-1)^{(n-2)/2}\cdot 2^{n-1}\cdot\cos 2x & \text{dla } n \text{ parzystych}\end{cases}$$

Dłuższy, ale czytelniejszy zapis tego samego wygląda następująco:

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}2^{n-1}\cdot\sin 2x & \text{dla } n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 4)\\ 2^{n-1}\cdot\cos 2x & \text{dla } n\equiv 2\,(\mathrm{mod}\ 4)\\ -2^{n-1}\cdot\sin 2x & \text{dla } n\equiv 3\,(\mathrm{mod}\ 4)\\ -2^{n-1}\cdot\cos 2x & \text{dla } n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 4)\end{cases}$$

Przykład 5: Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2} & \text{dla } x>0\\ 0 & \text{dla } x\leqslant 0\end{cases}$$

Wówczas dla każdej liczby naturalnej n oraz $x<0$ mamy $f^{(n)}(x)=0$, a ponadto

$$f^{(n)}(0^-)=0\,.$$

Natomiast dla $x>0$ otrzymujemy kolejno

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}\cdot e^{-1/x^2}\,,$$

$$f''(x)=\frac{-6x^2+4}{x^6}\cdot e^{-1/x^2}\,,$$

$$f'''(x)=\frac{24x^4-36x^2+8}{x^9}\cdot e^{-1/x^2}\,,$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{-120x^6+300x^4-144x^2+16}{x^{12}}\cdot e^{-1/x^2}\,,$$

$$f^{(5)}(x)=\frac{720x^8-2640x^6+2040x^4-480x^2+32}{x^{15}}\cdot e^{-1/x^2}\,.$$

Nie będziemy mieć ambicji, aby zapisać dokładny wzór na n-tą pochodną. Wystarczy zauważyć[13], że

$$f^{(n)}(x)=\frac{W_n(x)}{x^{3n}}\cdot e^{-1/x^2}\,,$$

gdzie $W_n(x)$ jest jakimś wielomianem stopnia $2n-2$. Ta wiedza wystarczy do tego, aby stosując regułę de l'Hospitala[14] wykazać[15], że dla każdego n

$$f^{(n)}(0^+)=0\,.$$

[13]Co można udowodnić indukcyjnie.

[14]Po podstawieniu $x=1/t$ i zastąpieniu zbieżności $x\to 0^+$ rozbieżnością $t\to+\infty$.

[15]Dowód pomijam, bo w tym momencie najważniejszy jest sam przykład funkcji, a nie szczegóły rachunków dowodzących jej własności.

Wniosek z tego płynie następujący:

Funkcja f jest klasy C^∞, czyli ma pochodne wszystkich rzędów.

A oto pokrewny przykład[16]:

PRZYKŁAD 6: Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

Wówczas $f\in C^\infty(\mathbb{R})$. Ponadto $f(x)>0$ dla $x>0$, ale $f^{(n)}(0)=0$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$.

Wniosek:

Funkcja f ma w zerze minimum właściwe[17], ale jej wszystkie pochodne w zerze są równe 0.

[16] To są ważne przykłady. Warto je zapamiętać, bo będziemy do nich wracać, także w drugim semestrze.
[17] Czyli z ostrą nierównością.