Druga pochodna funkcji odwrotnej.

Niech f będzie różniczkowalną funkcją monotoniczną na przedziale, o pochodnej różnej od zera[1]. Wówczas f ma funkcję odwrotną, którą dla przejrzystości[2] oznaczeń oznaczymy jedną literką: $g=f^{-1}$.

Przypomnijmy, że różniczkując stronami równość definiującą funkcję odwrotną

$$g(f(x))=x$$

można otrzymać wzór na pochodną funkcji odwrotnej

$$g'(f(x))\cdot f'(x)=1\,, \tag{1}$$

$$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}\,. \tag{2}$$

Różniczkując stronami równość[3] (1) możemy dojść do wzoru na drugą pochdną funkcji odwrotnej

$$g''(f(x))\cdot(f'(x))^2+g'(f(x))\cdot f''(x)=0\,,$$

$$g''(f(x))\cdot(f'(x))^2=-g'(f(x))\cdot f''(x)\,,$$

$$g''(f(x))=-\frac{g'(f(x))\cdot f''(x)}{(f'(x))^2}=-\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}\,.$$

Oczywiście w podobny sposób można uzyskać wzory na pochodne wyższych rzędów.

Otrzymaliśmy więc wzory na pochodne rzędu pierwszego i drugiego funkcji odwrotnej:

$$g'(f(x)) \;=\; \frac{1}{f'(x)}$$

$$g''(f(x)) \;=\; -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}$$

PRZYKŁAD: Niech $f(x)=e^x$. Wówczas funkcją odwrotną jest logarytm naturalny: $g(x)=\ln x$. Ponadto $f'(x)=f''(x)=e^x$.

Wstawienie tych danych do wzoru na drugą pochodną funkcji odwrotnej daje

$$g''(e^x)=-\frac{e^x}{(e^x)^3}=-\frac{1}{(e^x)^2}\,.$$

Po podstawieniu $y=e^x$ otrzymujemy dobrze znany wzór

$$g''(y)=-\frac{1}{y^2}\,.$$

[1] Czyli w konsekwencji pochodna ma stały znak: jest cały czas dodatnia albo cały czas ujemna.

[2] Chodzi o to, żeby primy i bisy nie gryzły się z ”-1”.

[3] Równie dobrze można zróżniczkować stronami wzór (2), jeśli ktoś tak woli.

Pochodne jednostronne drugiego rzędu.

Jeżeli funkcja f jest określona w punkcie x_0 i bezpośrednio na prawo od x_0, bądź też chcemy zignorować jej ewentualne wartości na lewo od x_0, to możemy zdefiniować pochodną prawostronną drugiego rzędu w x_0. Do tej definicji używamy pochodnej prawostronnej pierwszego rzędu w x_0 zamiast pochodnej (obustronnej). Wobec tego:

$$f''(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)-f'(x_0^+)}{x-x_0}\,.$$

Analogicznie definiujemy pochodną lewostronną drugiego rzędu:

$$f''(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f'(x)-f'(x_0^-)}{x-x_0}\,.$$

MIT: Jeśli funkcja ma w jakimś punkcie prawostronną drugą pochodną i ma w tym punkcie lewostronną drugą pochodną i obie te jednostronne drugie pochodne są równe, to funkcja ma w tym punkcie pochodną drugiego rzędu.

FAKT: Aby wyciągać taki wniosek musimy wiedzieć, że w tym punkcie funkcja jest różniczkowalna (czyli ma pochodną pierwszego rzędu). Nieistnienie pierwszej pochodnej wyklucza istnienie pochodnych wyższych rzędów, ale nie jest żadną przeszkodą dla istnienia jednostronnych pochodnych wyższych rzędów.

MIT: Jeśli funkcja ma w każdym punkcie dodatnią drugą pochodną lub dodatnie drugie pochodne jednostronne, to jest wypukła.

FAKT: Warunek istnienia i dodatniości jednostronnych pochodnych drugiego rzędu jest za słaby, aby zapewnić wypukłość.

Przykład: Rozważmy funkcję $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x)=x^2-2|x|\,.$$

Wówczas

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & \text{dla} \quad x\geqslant 0 \\ x^2+2x & \text{dla} \quad x<0 \end{cases}$$

Stąd po zróżniczkowaniu otrzymujemy

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & \text{dla} \quad x>0 \\ 2x+2 & \text{dla} \quad x<0 \end{cases}$$

Powyższe wzory działają także dla $x=0$, ale wówczas dają pochodne jednostronne:

$$f'(0^+)=-2 \qquad \text{oraz} \qquad f'(0^-)=2\,.$$

Wniosek: skoro pochodne jednostronne w zerze są różne, funkcja nie jest tam różniczkowalna.

Kolejne różniczkowanie pozwala wypisać wzory na pochodną drugiego rzędu

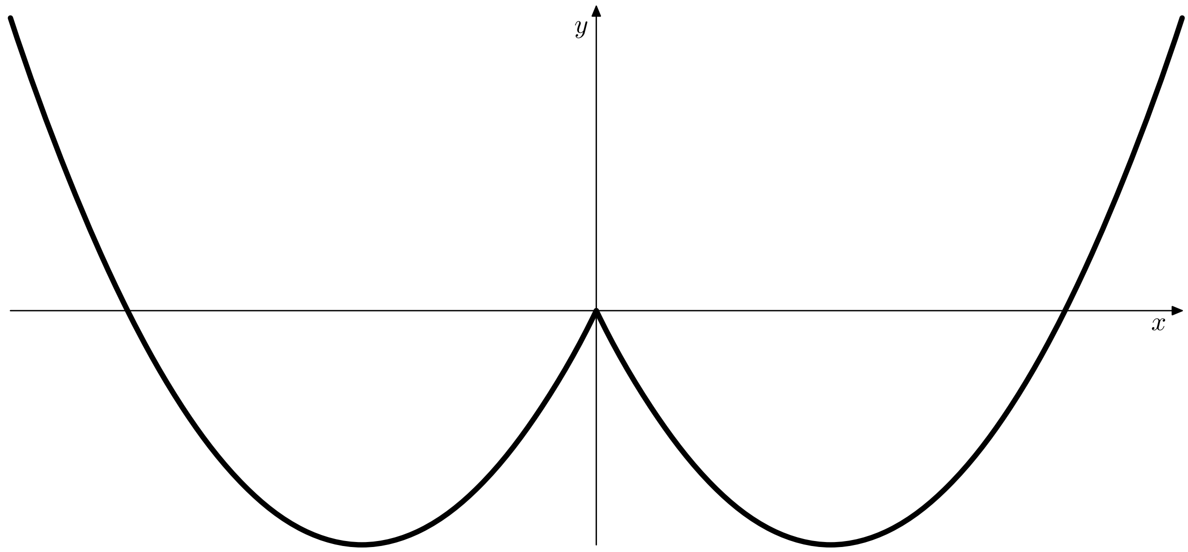
$$f''(x)=\begin{cases} 2 & \text{dla} \quad x>0 \\ \\ 2 & \text{dla} \quad x<0 \end{cases}$$

Dla $x=0$ powyższe wzory dają

$$f''(0^+)=2 \qquad \text{oraz} \qquad f''(0^-)=2\,.$$

Przestroga: jednostronne pochodne drugiego rzędu w zerze sa równe, ale ponieważ funkcja nie ma tam pierwszej pochodnej, to nie ma i drugiej pochodnej.

Bardzo łatwo powiedzieć, że $f''(x)=2$ przemykając nad tym, że dla $x=0$ istnieją tylko drugie pochodne jednostronne. To może prowadzić do wyciągnięcia fałszywego wniosku, że f jest wypukła. Nie jest to jednak prawdą, co pokazuje wykres funkcji f przedstawiony na rysunku 1.



rys. 1

561. Wyznaczyć taki wielomian kwadratowy $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} W(x) & \text{dla} \quad x<0 \\ e^x & \text{dla} \quad x\geqslant 0 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

Rozwiązanie:

Niech

$$W(x)=ax^2+bx+c\,.$$

Funkcja f na pewno jest dwukrotnie różniczkowalna poza zerem, wobec czego zadanie sprowadza się do wymuszenia dwukrotnej różniczkowalności w zerze.

Ponieważ $f(x)=e^x$ dla $x\geqslant 0$, otrzymujemy

$$f(0)=1\,, \qquad f'(0^+)=1 \qquad \text{oraz} \qquad f''(0^+)=1\,.$$

Aby funkcja f była dwukrotnie różniczkowalna w zerze, muszą zachodzić warunki
• ciągłość w zerze:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = W(0) = 1\,,$$

• różniczkowalność w zerze przy założeniu ciągłości:

$$f'(0^-) = W'(0) = 1\,,$$

• istnienie drugiej pochodnej w zerze przy założeniu istnienia pierwszej pochodnej:

$$f''(0^-) = W''(0) = 1\,.$$

Ponieważ

$$W'(x) = 2ax + b \qquad \text{oraz} \qquad W''(x) = 2a\,,$$

otrzymujemy układ równań

$$\left\{\begin{array}{rcl} c & = & 1 \\ b & = & 1 \\ 2a & = & 1 \end{array}\right.$$

który ma rozwiązanie $a = 1/2$, $b = 1$, $c = 1$.

Odpowiedź: Wielomianem spełniającym warunki zadania jest

$$W(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1\,.$$

Kolokwium 19.01.2021.

Kolokwium nr 2 odbędzie się we wtorek 19 stycznia 2021 r. w godzinach 12:15-14:00.

Podczas kolokwium należy dołączyć do spotkania na kanale wykładu w MS Teams i mieć **włączoną kamerkę** oraz wyciszony mikrofon.

Podczas kolokwium nie wolno korzystać z żadnych pomocy (np. notatek powstałych przed rozpoczęciem kolokwium, kalkulatora, pomocy innych osób, internetu w zakresie wykraczającym poza obsługę techniczną kolokwium).

Część I kolokwium (12:15-13:15) będzie polegała na udzieleniu krótkich odpowiedzi w quizie na Moodlu (30 punktów za tę część kolokwium).

Część II kolokwium (13:20-14:00) będzie polegała na zredagowaniu na kartce rozwiązań 2 zadań otwartych (po 10 punktów za zadanie), zeskanowanie/sfotografowanie ich, a następnie przesłanie skanów przez Moodla.

Kolokwium obejmuje materiał od początku semestru do wykładu 34 i listy 24 włącznie, czyli do strony **417** włącznie.