Pochodna drugiego rzędu.

Operacja różniczkowania przypisuje funkcji f jej pochodną f'. Jeżeli dziedzina pochodnej nie jest zbyt zdegenerowana[1], możemy do pochodnej ponownie zastosować operację różniczkowania otrzymując pochodną pochodnej funkcji f. Tak otrzymaną funkcję nazywamy drugą pochodną lub pochodną drugiego rzędu funkcji f i oznaczamy przez f''. Taką zabawę można kontynuować dalej różniczkując funkcję f'' i otrzymując trzecią pochodną[2] f'''.

Możemy więc napisać

$$(f')' = f'' \qquad \text{oraz} \qquad (f'')' = f'''$$

lub

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\,f(x)}{dx}\right) = \frac{d^2\,f(x)}{(dx)^2} = \frac{d^2\,f(x)}{dx^2} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2\,f(x)}{dx^2}\right) = \frac{d^3\,f(x)}{dx^3}\,.$$

Na przykład dla funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^{10}$ mamy

$$f'(x) = 10x^9\,, \qquad f''(x) = 90x^8 \qquad \text{oraz} \qquad f'''(x) = 720x^7\,.$$

Dziś skupimy się na pochodnej rzędu drugiego, a pochodnymi wyższych rzędów systematycznie zajmiemy się później. A konkretnie zainteresuje nas, jakie informacje o funkcji można uzyskać na podstawie jej drugiej pochodnej.

Najpierw przypomnijmy, co można o funkcji wyczytać z pierwszej pochodnej. Kluczowa własność jest taka: Jeśli f' jest dodatnia[3], to f jest rosnąca[4].

W szczególności z warunków[5]

$$h(x_0) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \underset{x\in(x_0,b)}{\forall}\ h'(x) > 0$$

wynika

$$\underset{x\in(x_0,b)}{\forall}\ h(x) > 0\,.$$

Podobnie z warunków[6]

$$h(x_0) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \underset{x\in(a,x_0)}{\forall}\ h'(x) > 0$$

---

[1]Formalnie rzecz biorąc, to różniczkować możemy nawet funkcję, która w żadnym punkcie nie jest różniczkowalna – po prostu jej pochodna jest funkcją o pustej dziedzinie i owa pochodna ma kolejną pochodną o pustej dziedzinie. Jednak chodzi nam tutaj nie o formalistyczne niuanse, a o różniczkowanie, które prowadzi do czegoś interesującego.

[2]Przypominam, że f' czytamy jako "ef prim". Z kolei f'' czytamy jako "ef bis", a f''' jako "ef ter".

[3]Dla płynności sformułowań piszę to tak, jakby były nierówności ostre, ale można to konsekwentnie zastąpić słabymi.

[4]Oczywiście trzeba założyć, że f jest określona na przedziale, czyli dziedzinie bez dziur. Takie założenie przyjmuję cały czas na dzisiejszym wykładzie, ale go nie przypominam na każdym kroku, aby nie utopić głównej idei w formalizmach.

[5]Znowu: Nie chcę utonąć w formalizmach, więc zakładam, że h jest określona i różniczkowalna wszędzie tam, gdzie to wynika z kontekstu. W szczególności zakładam, że h jest różniczkowalna na przedziale (a, b), a punkt x_0 należy do tego przedziału. Zmieniłem też literkę oznaczającą rozważaną funkcję z f na h, gdyż takie oznaczenie będzie za chwilę wygodniejsze.

[6]Jest jeszcze lustrzane odbicie tych nierówności, gdzie h' jest ujemna, ale pominę ich wyraźne formułowanie.

wynika[7]

$$\underset{x\in(a,x_0)}{\forall}\ h(x)<0\,.$$

To samo możemy przepisać w postaci używającej dwóch funkcji f i g, gdzie f ma większą pochodną niż g, więc f rośnie szybciej niż g. Poniższe wnioski uzyskujemy wprowadzając funkcję pomocniczą $h=f-g$ i do niej stosując wnioski sformułowane powyżej.

Z warunków

$$f(x_0)=g(x_0) \qquad \text{oraz} \qquad \underset{x\in(x_0,b)}{\forall}\ f'(x)>g'(x)$$

wynika

$$\underset{x\in(x_0,b)}{\forall}\ f(x)>g(x)\,,$$

a z warunków

$$f(x_0)=g(x_0) \qquad \text{oraz} \qquad \underset{x\in(a,x_0)}{\forall}\ f'(x)>g'(x)$$

wynika[8]

$$\underset{x\in(a,x_0)}{\forall}\ f(x)<g(x)\,.$$

Stosując dwukrotnie powyższe wnioski do pary funkcji o równych wartościach oraz równych pochodnych w x_0, ale różniących się drugą pochodną, możemy napisać co następuje:

Z warunków

$$f(x_0)=g(x_0),\quad f'(x_0)=g'(x_0) \qquad \text{oraz} \qquad \underset{x\in(x_0,b)}{\forall}\ f''(x)>g''(x)$$

wynika[9]

$$f(x_0)=g(x_0) \qquad \text{oraz} \qquad \underset{x\in(x_0,b)}{\forall}\ f'(x)>g'(x)\,,$$

a stąd wynika[10]

$$\underset{x\in(x_0,b)}{\forall}\ f(x)>g(x)\,.$$

---

[7]Zauważ, że na lewo od x_0 uległ zmianie kierunek nierówności: $h(x)<0$.

[8]Znowu: na lewo od x_0 uległ zmianie kierunek nierówności: $f(x)<g(x)$. To odpowiada następującej sytuacji komunikacyjnej: Jeśli w pewnej chwili dwa samochody jadą obok siebie, to ten, który jedzie szybciej, chwilę temu był z tyłu za samochodem wolniejszym.

[9]Bo z warunków

$$f'(x_0)=g'(x_0) \qquad \text{oraz} \qquad \underset{x\in(x_0,b)}{\forall}\ f''(x)>g''(x)$$

wynika

$$\underset{x\in(x_0,b)}{\forall}\ f'(x)>g'(x)\,.$$

[10]Interpretacja komunikacyjna: Dwa samochody jadą obok siebie z taką samą prędkością chwilową. Za chwilę z przodu będzie ten samochód, którego kierowca mocniej naciska pedał gazu (intuicyjnie oczywiste). Ale wymagająca zastanowienia nierówność, która za chwilę się pojawi, mówi: przed chwilą z przodu również był ten samochód, którego kierowca mocniej naciska pedał gazu.

Analogicznie z warunków

$$f(x_0)=g(x_0), \quad f'(x_0)=g'(x_0) \qquad \text{oraz} \qquad \underset{x\in(a,x_0)}{\forall} f''(x)>g''(x)$$

wynika

$$f(x_0)=g(x_0) \qquad \text{oraz} \qquad \underset{x\in(a,x_0)}{\forall} f'(x)<g'(x)\,,$$

a stąd wynika[11]

$$\underset{x\in(a,x_0)}{\forall} f(x)>g(x)\,.$$

Inne spojrzenie na twierdzenie Lagrange'a.

Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej udowodniłem poprzez dowód twierdzenia Rolle'a, które jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Lagrange'a. Wykorzystując podobne argumenty[12] pokazałem jak można wykazać, że pochodna ma własność Darboux, czyli między każdymi dwoma wartościami przyjmuje wszystkie wartości pośrednie. Konsekwencją własności Darboux jest przyjmowanie przez funkcję wszystkich wartości pomiędzy kresem dolnym i kresem górnym.

Niech więc f będzie funkcją, której pochodna ma kres dolny m i kres górny M.

Wprowadźmy funkcje[13]

$$g(x)=f(x_0)+(x-x_0)\cdot m \qquad \text{oraz} \qquad h(x)=f(x_0)+(x-x_0)\cdot M\,.$$

Wówczas

$$g(x_0)=f(x_0)=h(x_0) \qquad \text{oraz} \qquad \underset{x\in(x_0,b)}{\forall} g'(x)\leqslant f'(x)\leqslant h'(x)\,,$$

skąd wynika

$$\underset{x\in(x_0,b)}{\forall} g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)\,,$$

czyli

$$\underset{x\in(x_0,b)}{\forall} f(x_0)+(x-x_0)\cdot m\leqslant f(x)\leqslant f(x_0)+(x-x_0)\cdot M\,.$$

Analogicznie z warunków

$$g(x_0)=f(x_0)=h(x_0) \qquad \text{oraz} \qquad \underset{x\in(a,x_0)}{\forall} g'(x)\leqslant f'(x)\leqslant h'(x)$$

wynika

$$\underset{x\in(a,x_0)}{\forall} g(x)\geqslant f(x)\geqslant h(x)\,,$$

[11] Tym razem ostateczny kierunek nierówności się zachował, bo po drodze dwukrotnie zmienił się na przeciwny. Jeśli więc dwa samochody jadą obok siebie z taką samą prędkością chwilową, to samochód, którego kierowca mocniej naciska pedał gazu, przed chwilą jechał wolniej od drugiego samochodu, ale był z przodu.

[12] Zerowanie pochodnej funkcji różniczkowalnej w punkcie ekstremalnym.

[13] Interpretacja komunikacyjna: Niech f będzie samochodem, którego prędkość cały czas mieści się w zakresie od m do M. Wyobraźmy sobie dwa samochody, które w chwili x_0 znajdowały się w tym samym miejscu, co samochód f. Jeden z tych samochodów, nazwany g, porusza się ze stałą prędkością m. Drugi samochód, nazwany h, porusza się ze stałą prędkością M. Jeśli wszystkie trzy samochody w chwili x_0 znajdowały się w tym samym miejscu, to w przyszłości najbardziej z przodu znajdzie się samochód najszybszy, a w przeszłości najbardziej z przodu był samochód najwolniejszy.

czyli

$$\underset{x\in(a,x_0)}{\forall} f(x_0)+(x-x_0)\cdot m \geqslant f(x) \geqslant f(x_0)+(x-x_0)\cdot M\,.$$

W każdym z tych dwóch przypadków

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\cdot(\text{coś pomiędzy } m \text{ i } M)\,.$$

Ponieważ pochodna ma własność Darboux, w związku z czym przyjmuje wszystkie wartości pomiędzy m i M, to tajemnicze "coś pomiędzy m i M" jest wartością pochodnej w jakimś punkcie, co prowadzi[14] do

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\cdot f'(x_0+t_x(x-x_0))$$

dla pewnego $t_x\in(0,\,1)$.

To, co przed chwilą zrobiliśmy na poziomie pierwszej pochodnej, możemy zrobić na poziomie pochodnej rzędu drugiego. Niech więc teraz f będzie funkcją, której druga pochodna ma kres dolny m i kres górny M.

Wprowadźmy funkcje

$$g(x)=f(x_0)+(x-x_0)\cdot f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2\cdot m}{2}$$

oraz

$$h(x)=f(x_0)+(x-x_0)\cdot f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2\cdot M}{2}\,.$$

Wówczas z warunków[15]

$$g(x_0)=f(x_0)=h(x_0),\quad g'(x_0)=f'(x_0)=h'(x_0) \qquad \text{oraz} \qquad \underset{x\in(x_0,b)}{\forall} g''(x)\leqslant f''(x)\leqslant h''(x)$$

wynika

$$\underset{x\in(x_0,b)}{\forall} g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)\,,$$

a z warunków

$$g(x_0)=f(x_0)=h(x_0),\quad g'(x_0)=f'(x_0)=h'(x_0) \qquad \text{oraz} \qquad \underset{x\in(a,x_0)}{\forall} g''(x)\leqslant f''(x)\leqslant h''(x)$$

wynika

$$\underset{x\in(a,x_0)}{\forall} g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)\,.$$

Tak czy owak dla każdego x zachodzą nierówności

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)\,,$$

czyli

$$f(x_0)+(x-x_0)\cdot f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2\cdot m}{2}\leqslant f(x)\leqslant f(x_0)+(x-x_0)\cdot f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2\cdot M}{2}\,.$$

[14] Świadomie popełniam tu drobne oszustwo, bo nie precyzuję zbioru, na którym m i M są kresami pochodnej. To można doprecyzować, ale kosztem skomplikowania oznaczeń. Ponieważ bardziej zależy mi na przekazaniu intuicji niż wypełnieniu technicznych detali dowodu, pozostawiam tu pewne niedopowiedzenia.

[15] Zauważmy, że g i h są wielomianami stopnia co najwyżej drugiego, a przy tym $g''(x)=m$ i $h''(x)=M$ są funkcjami stałymi.

W konsekwencji

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\cdot f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2\cdot(\text{coś pomiędzy } m \text{ i } M)}{2}$$

Ponieważ f'' ma własność Darboux, przyjmuje ona wszystkie wartości pomiędzy m i M, wobec czego

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\cdot f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2\cdot f''(x_0+t_x(x-x_0))}{2}$$

dla pewnego $t_x\in(0,\,1)$.

Otrzymaliśmy wzór, który jest podobny do twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej, tylko używa drugiej pochodnej zamiast pierwszej. Jest to szczególny przypadek wzoru Taylora, który w całej ogólności poznamy wkrótce.

Wzór ten zachodzi przy założeniu, że funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna.

Wzór Taylora[16]:

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\cdot f'(x_0)+$$

$$+\frac{(x-x_0)^2\cdot f''(x_0+t_x(x-x_0))}{2} \qquad t_x\in(0,\,1)$$

Jako przykład zastosowania wzoru Taylora oszacujemy liczbę $\sqrt{79}$.

W tym celu przyjmijmy $f(x)=\sqrt{x}$ oraz $x_0=81$. Liczbę x_0 wybieramy tak, aby była nie za daleko od 79 i aby funkcja f oraz jej pochodne dawały w x_0 wymierne wartości. Ponieważ

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} \qquad \text{oraz} \qquad f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

po podstawieniu $x=79$ wzór Taylora przyjmuje postać

$$\sqrt{79}=\sqrt{81}+(79-81)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{81}}+(79-81)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4\cdot c^{3/2}}\right)\,,$$

[16]Formalny kontekst tego wzoru jest następujący: Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[x,\,x_0]$ albo $[x_0,\,x]$ i dwukrotnie różniczkowalna w $(x,\,x_0)$ albo $(x_0,\,x)$ to istnieje takie $t_x\in(0,\,1)$, czyli w praktyce takie $c=x_0+t_x(x-x_0)$ pomiędzy x_0 i x, że ma miejsce podana równość.

O praktycznym wykorzystaniu tego wzoru należy myśleć następująco: Dana jest funkcja f i taki punkt x_0, że łatwo umiemy wyliczyć $f(x_0)$ oraz $f'(x_0)$, a ponadto wiemy co nieco o zachowaniu f'' w pobliżu x_0. Wówczas możemy oszacować wartości funkcji f w pobliżu punktu x_0.

Komunikacyjnie: Jeśli znamy dokładne położenie samochodu w pewnej chwili i znamy dokładnie jego prędkość chwilową w tym samym momencie, a ponadto wiemy mniej więcej jak mocno kierowca naciska pedał gazu, to w przybliżeniu znamy położenie samochodu w chwilach bliskich do rozważanej.

gdzie $c\in(79,\,81)$. Po uproszczeniu otrzymujemy kolejno

$$\sqrt{79}=9-2\cdot\frac{1}{2\cdot 9}+4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4\cdot c^{3/2}}\right)\,,$$

$$\sqrt{79}=9-\frac{1}{9}-\frac{1}{2\cdot c^{3/2}}\,,$$

$$\sqrt{79}=8,(8)-\frac{1}{2\cdot c^{3/2}}\,.$$

Z nierówności $79<c<81$ wynika $8<\sqrt{c}<9$, skąd $512<c^{3/2}<729$ i dalej po oszacowaniu przez okrągłe liczby

$$1000<2\cdot c^{3/2}<2000\,.$$

Wobec tego

$$8,887(8)=8,(8)-\frac{1}{1000}<\sqrt{79}<8,(8)-\frac{1}{2000}=8,8883(8)\,,$$

skąd otrzymujemy przybliżenie z dokładnością do 3 miejsc po przecinku:

$$\sqrt{79}\approx 8,888\,.$$