Reguła de l'Hospitala.

Rozważmy taką hipotetyczną sytuację komunikacyjną. Jeden samochód pokonał trasę z Wrocławia do Opola (100 km) w ciągu godziny. Drugi samochód w czasie tej samej godziny[1] pokonał trasę z Wrocławia do Brzegu (50 km). Wówczas średnie prędkości samochodów wynoszą odpowiednio 100 km/h i 50 km/h. Jak już wiemy (twierdzenie Lagrange'a) istniał moment, w którym pierwszy samochód miał prędkość 100 km/h. I istniał moment, w którym drugi samochód miał prędkość 50 km/h. Ale to nie musiał być ten sam moment. Jednak musiał istnieć moment, w którym pierwszy samochód poruszał się dokładnie dwa razy szybciej niż drugi.

Matematyczne twierdzenie odpowiadające powyższej sytuacji brzmi następująco:

Twierdzenie Cauchy'ego: Niech f i g będą funkcjami ciągłymi na przedziale domkniętym $[a, b]$, różniczkowalnymi wewnątrz tego przedziału, czyli na przedziale otwartym (a, b). Wówczas istnieje taki punkt $c\in(a, b)$, że

$$f'(c)\cdot(g(b)-g(a))=g'(c)\cdot(f(b)-f(a)) ,$$

co przy dodatkowym założeniu[2] $g(a)\neq g(b)$ można zapisać w przyjemniejszej formie:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} .$$

Dowód:

Rozważmy funkcję pomocniczą

$$h(x)=f(x)\cdot(g(b)-g(a))-g(x)\cdot(f(b)-f(a)) .$$

Wówczas funkcja h jest ciągła na przedziale $[a, b]$, różniczkowalna na (a, b), a ponadto

$$h(a)=f(a)\cdot(g(b)-g(a))-g(a)\cdot(f(b)-f(a))=f(a)\cdot g(b)-g(a)\cdot f(b)$$

oraz

$$h(b)=f(b)\cdot(g(b)-g(a))-g(b)\cdot(f(b)-f(a))=-f(b)\cdot g(a)+g(b)\cdot f(a) ,$$

skąd wynika $h(a)=h(b)$. Zatem funkcja h spełnia założenia twierdzenia Rolle'a, wobec czego istnieje takie $c\in(a, b)$, że $h'(c)=0$. Ponieważ

$$h'(x)=f'(x)\cdot(g(b)-g(a))-g'(x)\cdot(f(b)-f(a)) ,$$

otrzymujemy

$$0=h'(c)=f'(c)\cdot(g(b)-g(a))-g'(c)\cdot(f(b)-f(a)) ,$$

co kończy dowód twiedzenia Cauchy'ego.

---

[1] Czyli oba samochody w tym samym momencie wystartowały z Wrocławia i w tym samym czasie osiągnęły swoje miasta docelowe. Podkreślmy, że samochody mogą rozpocząć podróż z dodatnią prędkością. Za początek podróży uznajemy minięcie granic miasta Wrocławia, co oba samochody uczyniły jednocześnie, ale zdążyły się już rozpędzić. Analogiczna uwaga dotyczy osiągnięcia miast docelowych.

[2] Nie jest to założenie ograniczające, gdyż w przypadku $g(a)=g(b)$ podany wzór przybiera postać

$$0=g'(c)\cdot(f(b)-f(a))$$

i wynika bezpośrednio z twierdzenia Rolle'a zastosowanego do funkcji g na przedziale $[a, b]$, które to twierdzenie daje $g'(c)=0$ dla pewnego $c\in(a, b)$. Wówczas funkcja f zajmuje miejsce na widowni i przygląda się biernie twierdzeniu Cauchy'ego, sama nie biorąc w nim udziału.

Ważnym wnioskiem z twierdzenia Cauchy'ego jest reguła de l'Hospitala, która pozwala na sprawne obliczanie granic ilorazów funkcji prowadzących do wyrażeń nieoznaczonych.

Reguła de l'Hospitala[3] (wersja podstawowa):
Niech funkcje f i g będą różniczkowalne na zbiorze[4]

$$(x_0-\delta,\, x_0+\delta)\setminus\{x_0\} = (x_0-\delta,\, x_0)\cup(x_0,\, x_0+\delta)\,,$$

a ponadto niech g' nie przyjmuje wartości 0 oraz

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0\,.$$

Jeżeli istnieje granica (lub granica niewłaściwa $\pm\infty$)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

to istnieje również granica (być może niewłaściwa)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

i granice te są równe.

Innymi słowy, po sprawdzeniu założeń możemy napisać[5]

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

czyli zastąpić granicę ilorazu funkcji granicą ilorazu ich pochodnych.

Dowód powyższego twierdzenia opiera się na twierdzeniu Cauchy'ego. Skoro

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0\,.$$

to możemy przyjąć, że f i g są ciągłe na przedziale $(x_0-\delta,\, x_0+\delta)$, w razie potrzeby[6] definiując

$$f(x_0) = g(x_0) = 0\,.$$

Wówczas na mocy twierdzenia Cauchy'ego dla każdego $x\in(x_0-\delta,\, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ istnieje takie $t_x\in(0,\,1)$, że

$$\frac{f'(x_0+t_x(x-x_0))}{g'(x_0+t_x(x-x_0))} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}\,. \qquad (*)$$

Oznaczając $h(x)=x_0+t_x(x-x_0)$ oraz $Q(x)=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, mamy $h(x)\to x_0$ przy $x\to x_0$, wobec czego

$$\lim_{x\to x_0} Q(h(x)) = \lim_{x\to x_0} Q(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

---

[3] Czytamy: de lopitala.

[4] Funkcje mogą być różniczkowalne tylko na przedziale $(x_0-\delta,\, x_0)$ lub tylko na przedziale $(x_0,\, x_0+\delta)$, ale wtedy trzeba wszędzie mówić o granicach jednostronnych w x_0.

[5] Biorąc sobie do serca **Ostrzeżenie 2.**

[6] Gdyby się okazało, że f i g nie są określone w x_0 albo przyjmują tam jakieś księżycowe wartości.

Zatem lewa strona równości $(*)$ równa $Q(h(x))$ dąży do
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
przy $x\to x_0$, wobec czego prawa strona dąży do tej samej granicy (lub granicy niewłaściwej $\pm\infty$), czyli
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Okazuje się jednak, że reguła de l'Hospitala może być stosowana w nieco szerszym zakresie niż to sformułowałem i udowodniłem przed chwilą. Po pierwsze, możemy ją stosować także do wyrażeń nieoznaczonych postaci $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, a nie tylko $\frac{0}{0}$. Po drugie, sam punkt graniczny x_0 może być $\pm\infty$.

Dowody tych uogólnień pomijam.

Ostrzeżenie 1: Jeśli iloraz nie prowadzi w granicy do wyrażenia nieoznaczonego, to reguły de l'Hospitala stosować **nie wolno!** Na przykład zastosowanie reguły de l'Hospitala do granicy
$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+3}{5x+7}=\frac{3}{7}$$
daje fałszywy wynik
$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{5}=\frac{2}{5}\,.$$
Dlatego sprawdzenie, że w istocie mamy do czynienia z wyrażeniem nieoznaczonym, jest integralną częścią wykonania procedury opisanej w regule de l'Hospitala.

Ostrzeżenie 2: Reguła de l'Hospitala nie zamienia granicy na granicę równoważną, a mianowicie granica ilorazu pochodnych może nie istnieć pomimo że istnieje granica ilorazu samych funkcji. Na przykład zastosowanie reguły de l'Hospitala do granicy
$$\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}1+x\cdot\sin\frac{1}{x}=1$$
prowadzi do granicy
$$\lim_{x\to 0}\frac{1+2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to 0}1+2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}=1+0-???\,,$$
która nie istnieje.

Jeśli więc zastosowanie reguły de l'Hospitala prowadzi nas do granicy, która nie istnieje, to wniosek z przeprowadzonego rachunku jest żaden i trzeba wszystko zaczynać od nowa. Jeśli natomiast reguła de l'Hospitala prowadzi do granicy skończonej lub granicy niewłaściwej $\pm\infty$, to wszystko jest w porządku i wyjściowa granica istnieje[7] i jest równa tyle, ile nam wyszło po zastosowaniu reguły de l'Hospitala.

[7] Być może jako granica niewłaściwa $\pm\infty$.

UWAGA: Prostą konsekwencją reguły de l'Hospitala jest następujące twierdzenie: Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale $(x_0-\delta,\, x_0+\delta)$ i różniczkowalną na zbiorze[8]

$$(x_0-\delta,\, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}=(x_0-\delta,\, x_0)\cup(x_0,\, x_0+\delta)\,.$$

Jeżeli istnieje granica pochodnej w x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f'(x)\,,$$

to funkcja f jest różniczkowana w x_0 i przy tym

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0} f'(x)\,.$$

Prawdziwość powyższego twierdzenia wynika z zastosowania reguły de l'Hospitala[9] do definicji pochodnej:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{\text{d'H}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{1}=\lim_{x\to x_0} f'(x)\,.$$

A na zakończenie dzisiejszego wykładu kilka przykładów zastosowania reguły de l'Hospitala.

531. Dla dowolnej liczby naturalnej n ze wzorów skróconego mnożenia można wyliczyć

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\sum_{k=0}^{n-1}x^k=\sum_{k=0}^{n-1}\lim_{x\to 1}x^k=\sum_{k=0}^{n-1}1=n\,.$$

Dowieść, że również

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^\pi-1}{x-1}=\pi\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ dana granica prowadzi do wyrażenia nioznaczonego $\frac{0}{0}$, możemy zastosować regułę de l'Hospitala:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^\pi-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cdot x^{\pi-1}}{1}=\pi\,.$$

532. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0^+} x^x\,.$$

Rozwiązanie:

Dzięki funkcji logarytmicznej/wykładniczej zamienimy potęgowanie na mnożenie, a mnożenie przedstawimy w postaci dzielenia, aby móc zastosować regułę de l'Hospitala. Otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0^+} x^x=\lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\ln x}$$

[8]Funkcja może też być różniczkowalna na przedziale $(x_0-\delta,\, x_0)$ lub $(x_0,\, x_0+\delta)$, tylko wtedy trzeba mówić o ciągłości jednostronnej w x_0 oraz o pochodnej jednostronnej w x_0.

[9]Stosowanie reguły de l'Hospitala wypada opisać w komentarzach towarzyszących rachunkom. Można też użyć nad znakiem równości literek kojarzących się z regułą de l'Hospitala, jak np. "d'H" lub "l'H".

oraz

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{\text{d'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0\,,$$

skąd

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\ln x} = e^0 = 1\,.$$

533. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-2e^x+1}{e^x-1-x} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{e^{2h}-2e^h+1}{e^h-1-h} - A}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{2h}-2e^h+1-Ae^h+A+Ah}{he^h-h-h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{2e^{2h}-2e^h-Ae^h+A}{e^h+he^h-1-2h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{4e^{2h}-2e^h-Ae^h}{2e^h+he^h-2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{2-A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=2$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{8e^{2h}-4e^h}{3e^h+he^h} = \frac{4}{3}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=2$ i wówczas $f'(0)=4/3$.

534. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\ln(1+x)}{1-\cos x} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h-\ln(1+h)}{1-\cos h} - A}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-\ln(1+h)-A+A\cos h}{h-h\cos h}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+h}-A\sin h}{1-\cos h+h\sin h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(1+h)^2}-A\cos h}{2\sin h+h\cos h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{1-A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=1$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-2}{(1+h)^3}+\sin h}{3\cos h-h\sin h}=\frac{-2}{3}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=1$ i wówczas $f'(0)=-2/3$.

535. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1+\ln(1-x)}{x^3} & \text{dla}\quad x\neq 0\\[2ex] A & \text{dla}\quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^h-1+\ln(1-h)}{h^3}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1+\ln(1-h)-Ah^3}{h^4}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\frac{1}{1-h}-3Ah^2}{4h^3}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\frac{1}{(1-h)^2}-6Ah}{12h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\frac{2}{(1-h)^3}-6A}{24h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{-1-6A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=-1/6$. Wówczas możemy po raz czwarty zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\frac{6}{(1-h)^3}}{24}=-\frac{5}{24}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=-1/6$ i wówczas $f'(0)=-5/24$.