Pochodna funkcji (c.d.).

Pochodna funkcji odwrotnej.

Jeżeli funkcja określona na przedziale[1] jest ciągła i ściśle monotoniczna, to posiada funkcję odwrotną, która też jest ciągła. Okazuje się, że dołożenie założenia różniczkowalności[2] funkcji sprawia, że funkcja odwrotna też jest różniczkowalna, o ile pochodna jest różna od zera[3].

Do pochodnej funkcji odwrotnej można podejść na dwa sposoby.

PODEJŚCIE GEOMETRYCZNE: Zainteresujmy się pochodną funkcji f w punkcie x_0, gdzie $f(x_0)=y_0$. Wówczas różniczkowalność funkcji f w punkcie x_0 jest równoważna istnieniu niepionowej[4] prostej stycznej[5] do wykresu funkcji f w punkcie (x_0, y_0). Sama zaś wartość pochodnej w tym punkcie[6] jest równa współczynnikowi kierunkowemu tejże stycznej (rys. 1).

Wykres funkcji f^{-1} odwrotnej do funkcji f powstaje przez symetryczne odbicie wykresu funkcji f względem prostej o równaniu $y=x$. Na rysunku 2 wykres funkcji f jest narysowany na niebiesko, a jego odbicie na czerwono. Jak widać na rysunku, styczna do wykresu funkcji f w punkcie (x_0, y_0) przejdzie przez symetrię na styczną do wykresu funkcji f^{-1} w punkcie (y_0, x_0). Zatem funkcja f^{-1} jest różniczkowalna[7], a jej pochodna jest równa współczynnikowi kierunkowemu prostej stycznej do wykresu funkcji f^{-1} w punkcie (y_0, x_0). Ponieważ odbicie symetryczne względem prostej $y=x$ odwraca współczynniki kierunkowe odbijanych prostych, otrzymujemy:

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

W skrócie można to wysłowić: pochodna funkcji odwrotnej jest odwrotnością pochodnej funkcji. Jednak takie zgrabne sformułowanie kryje w sobie pewną pułapkę, bo istotną częścią powyższego wzoru jest użycie odpowiednich argumentów funkcji. Biorąc pod uwagę, że $y_0=f(x_0)$ oraz $x_0=f^{-1}(y_0)$, wzór na pochodną funkcji odwrotnej można przepisać w postaci

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}$$

[1] Przedział może być domknięty lub otwarty lub otwarty z jednej strony, a domknięty z drugiej. Może być też ograniczony albo nieograniczony. Ważne, aby dziedzina funkcji była spójna (czyli w jednym kawałku).

[2] Do tego trzeba coś zrobić z końcami przedziału, na którym funkcja jest określona. Można przyjąć, że dołożenie założenia różniczkowalności automatycznie dokłada założenie, że dziedzina funkcji jest przedziałem otwartym. Ale przeżylibyśmy też pozostawienie przedziału domkniętego i obsadzenie w roli pochodnej na końcach pochodnej jednostronnej.

[3] Czyli w praktyce oznacza to, że albo pochodna jest w całej dziedzinie dodatnia, albo jest w całej dziedzinie ujemna.

[4] Czyli nierównoległej do osi OY.

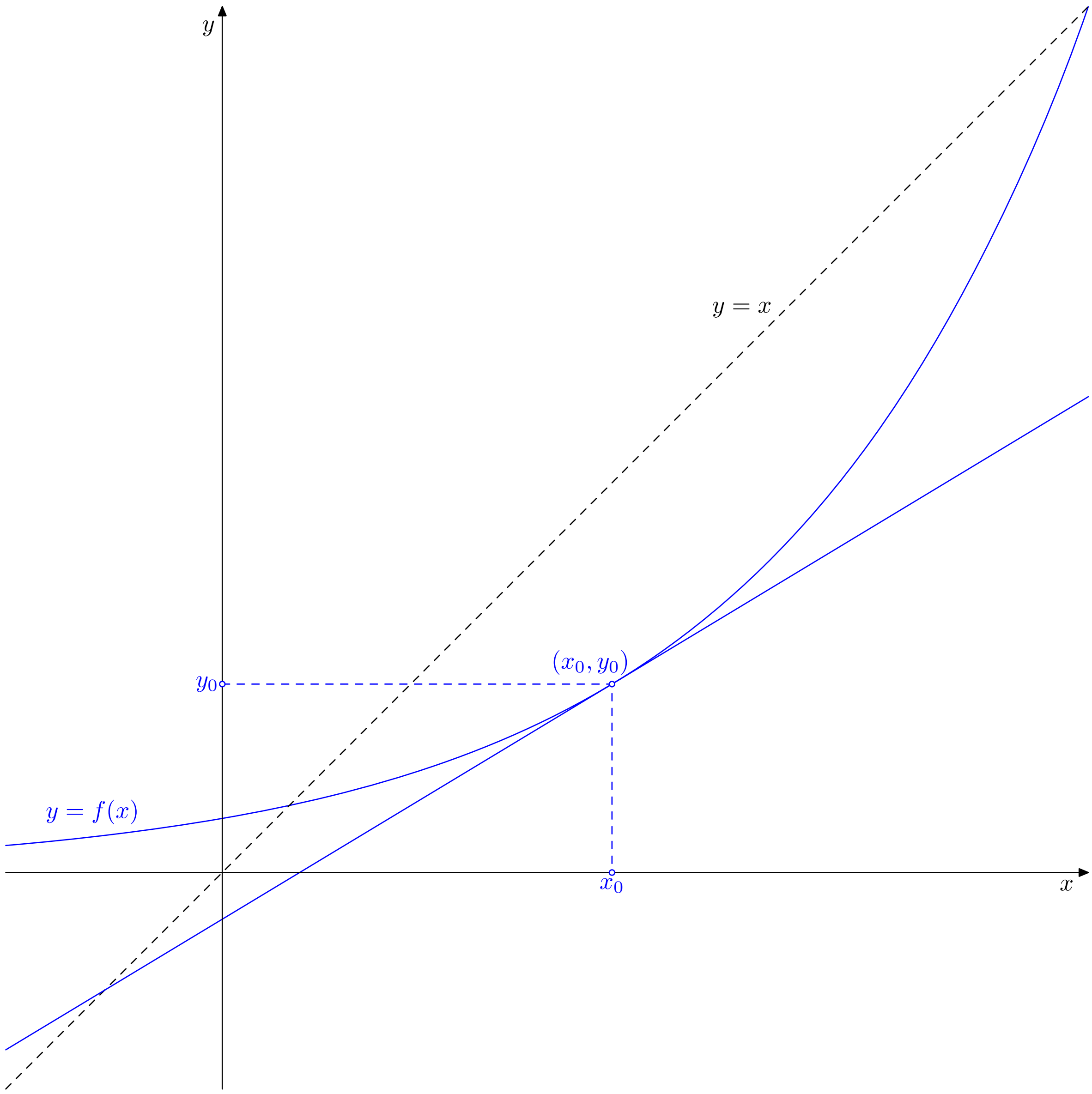
[5] Rozumianej jako granica siecznych.

[6] Jeśli już ta pochodna istnieje.

[7] Przy założeniu $f'(x_0)\neq 0$, czyli założeniu, że niebieska styczna nie jest pozioma (nie jest równoległa do osi OX), a co za tym idzie czerwona styczna nie jest pionowa.

lub

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}\,.$$



rys. 1

Podejście formalistyczne: Różniczkując stronami równość

$$f^{-1}(f(x)) = x\,,$$

która definiuje funkcję odwrotną, otrzymujemy

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) \cdot f'(x) = 1\,,$$

skąd

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}\,.$$

Inna możliwość: różniczkujemy równość

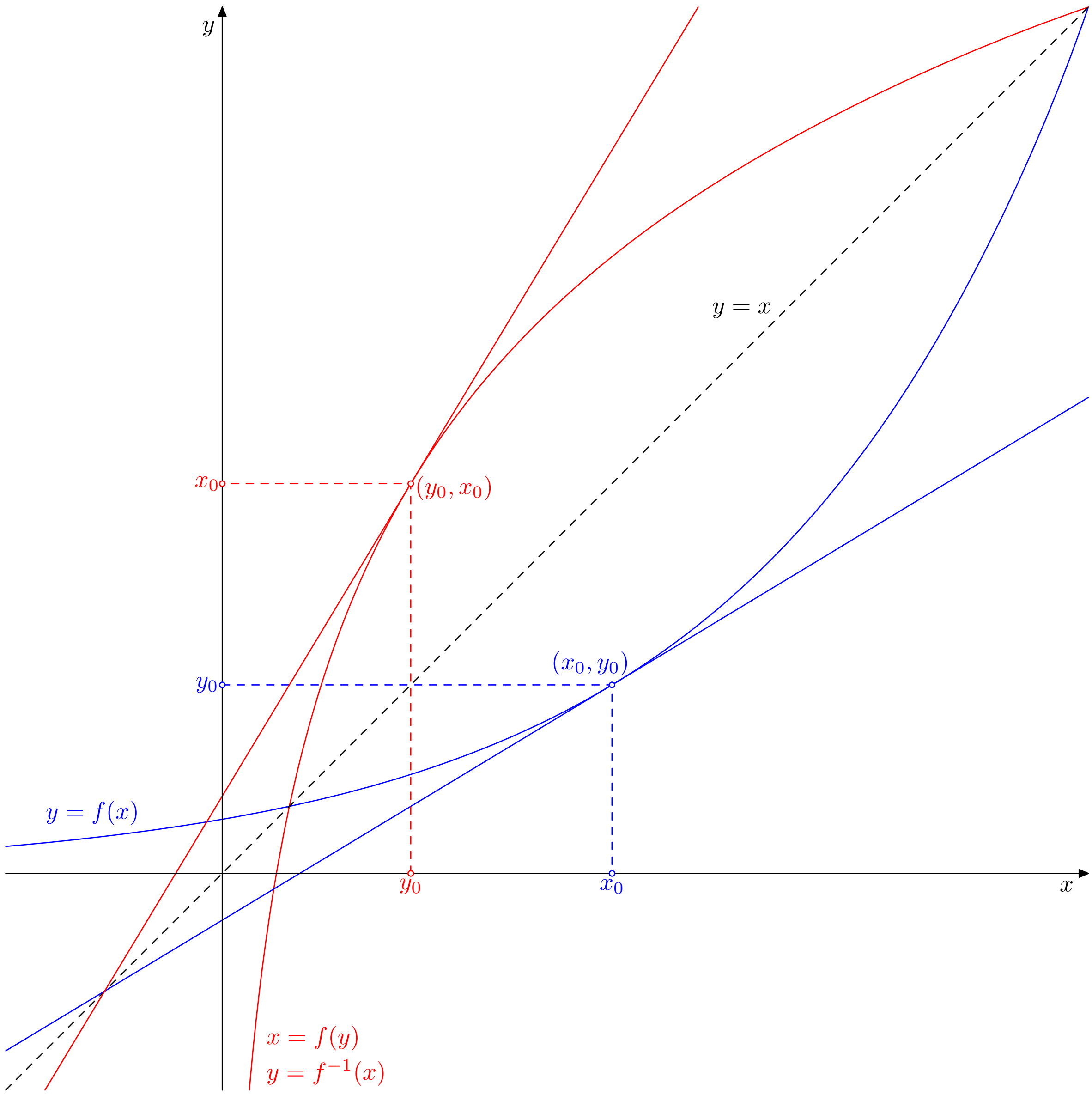
$$f(f^{-1}(x)) = x\,,$$

otrzymując

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot \left(f^{-1}\right)'(x) = 1\,,$$

czyli

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\,.$$



rys. 2

Jako ilustrację wzoru na pochodną funkcji odwrotnej, wyprowadzimy wzór na pochodną logarytmu naturalnego[8] w opraciu o wiedzę, że

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x\,.$$

Oznaczmy $f(x)=e^x$. Wówczas $f^{-1}(x)=\ln x$, jednak przyjmiemy oznaczenie $g=f^{-1}$, aby móc sprawniej zapisywać pochodną tej funkcji przy użyciu prima.

Wzór ogólny[9]

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$$

w interesującym nas przypadku daje

$$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}\,.$$

Co oznacza dodatniość pochodnej w punkcie?

MIT: Jeżeli funkcja różniczkowalna[10] ma w jakimś punkcie dodatnią pochodną, to w pewnym otoczeniu tego punktu jest rosnąca.

FAKT: Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna oraz $f'(x_0)>0$, to

$$\underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in(x_0,\,x_0+\delta)}{\forall}\ f(x)>f(x_0)$$

oraz

$$\underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in(x_0-\delta,\,x_0)}{\forall}\ f(x)<f(x_0)\,,$$

czyli bezpośrednio[11] na prawo od x_0 funkcja przyjmuje wartości większe niż w x_0, a bezpośrednio na lewo mniejsze. I więcej z tych założeń nie wydusimy. W szczególności f nie musi być rosnąca w żadnym otoczeniu[12] punktu x_0.

FAKT 2: Jeżeli jednak funkcja f ma ciągłą[13] pochodną oraz $f'(x_0)>0$, to f' jest dodatnia w pobliżu x_0, a co za tym idzie f jest rosnąca w pobliżu x_0.

Zaraz, zaraz. Przecież obserwując w samochodzie wskazówkę prędkościomierza[14] widzimy, że porusza się ona w sposób ciągły. To pochodna może być nieciągła? Jak to? Ano tak to...

---

[8]Logarytm naturalny jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej o podstawie e.

[9]Czyli zakładający jedynie, że funkcja g jest odwrotna do f. No i rzecz jasna zakładający, że f jest różniczkowalna i ma niezerującą się pochodną.

[10]Może być nawet różniczkowalna na całej prostej $\mathbb{R}$.

[11]Użyłem słowa "bezpośrednio", aby nadmiernie nie komplikować tego zdania. Ściśle jest to opisane kwantyfikatorami. A chodzi o to, że funkcja przyjmuje wartości większe niż w x_0 w pewnym prawostronnym otoczeniu punktu x_0, czyli bliziutko na prawo od x_0.

[12]Przez otoczenie punktu x_0 możemy rozumieć każdy przedział postaci $(x_0-\delta,\,x_0+\delta)$, gdzie $\delta>0$. Wprawdzie w topologii pojęcie otoczenia ma nieistotnie szersze znaczenie, ale tutaj możemy przyjąć wersję uproszczoną.

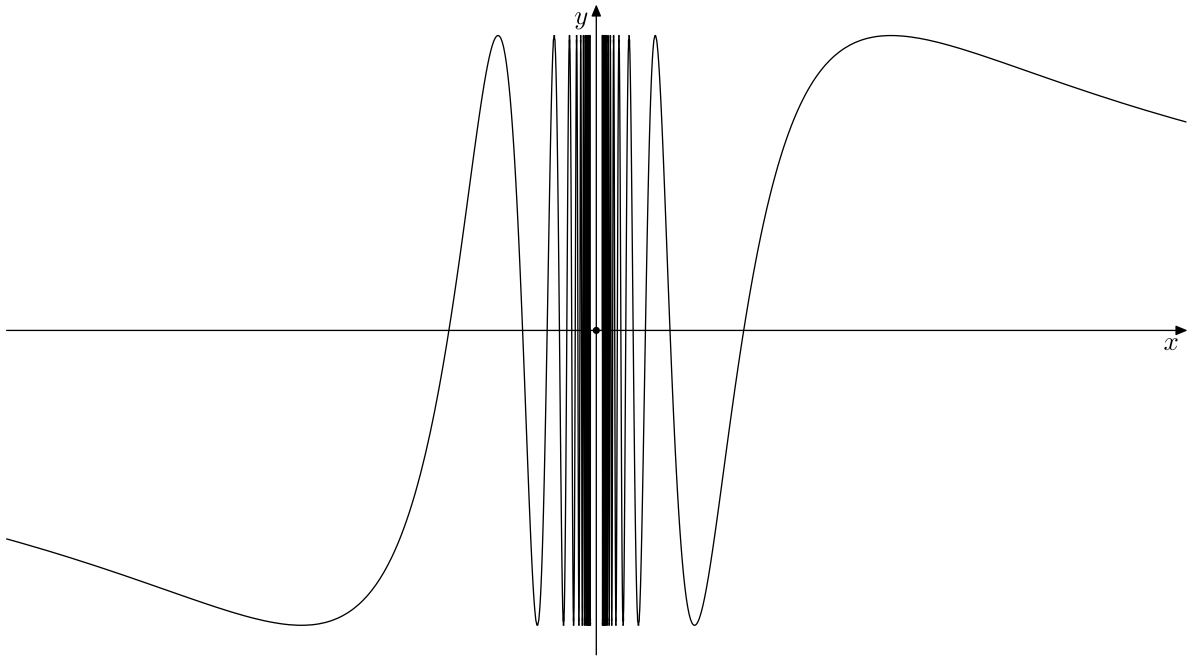
[13]Faktycznie wystarczy ciągłość pochodnej w x_0.

[14]Czyli pochodnościomierza drogi po czasie.

Jako główny składnik skonstruowania odpowiedniego przykładu, przywołam po raz kolejny funkcję f_{12} z wykładu 20:

$$f_{12}(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x=0 \end{cases} \qquad D_{f_{12}}=\mathbb{R}$$

Przypominam, że jest to funkcja nieciągła, której wykres jawi się jako nieprzerwana linia, co można zaobserwować na rysunku 3.



rys. 3

Jeśli teraz odpowiednio mocno przygnieciemy funkcję f_{12} w zerze, na przykład mnożąc ją przez x^2, to otrzymamy funkcję

$$f_{37}(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x=0 \end{cases} \qquad D_{f_{37}}=\mathbb{R}$$

której wykres jest naszkicowany na rysunku 4.

Funkcja ta nie tylko stała się ciągła[15], ale nawet różniczkowalna[16], gdyż

$$f'_{37}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_{37}(x)-f_{37}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0\,.$$

[15]Do uzyskania same ciągłości wystarczyłoby przemnożenie przez x. Jednak wtedy otrzymalibyśmy funkcję nieróżniczkowalną.

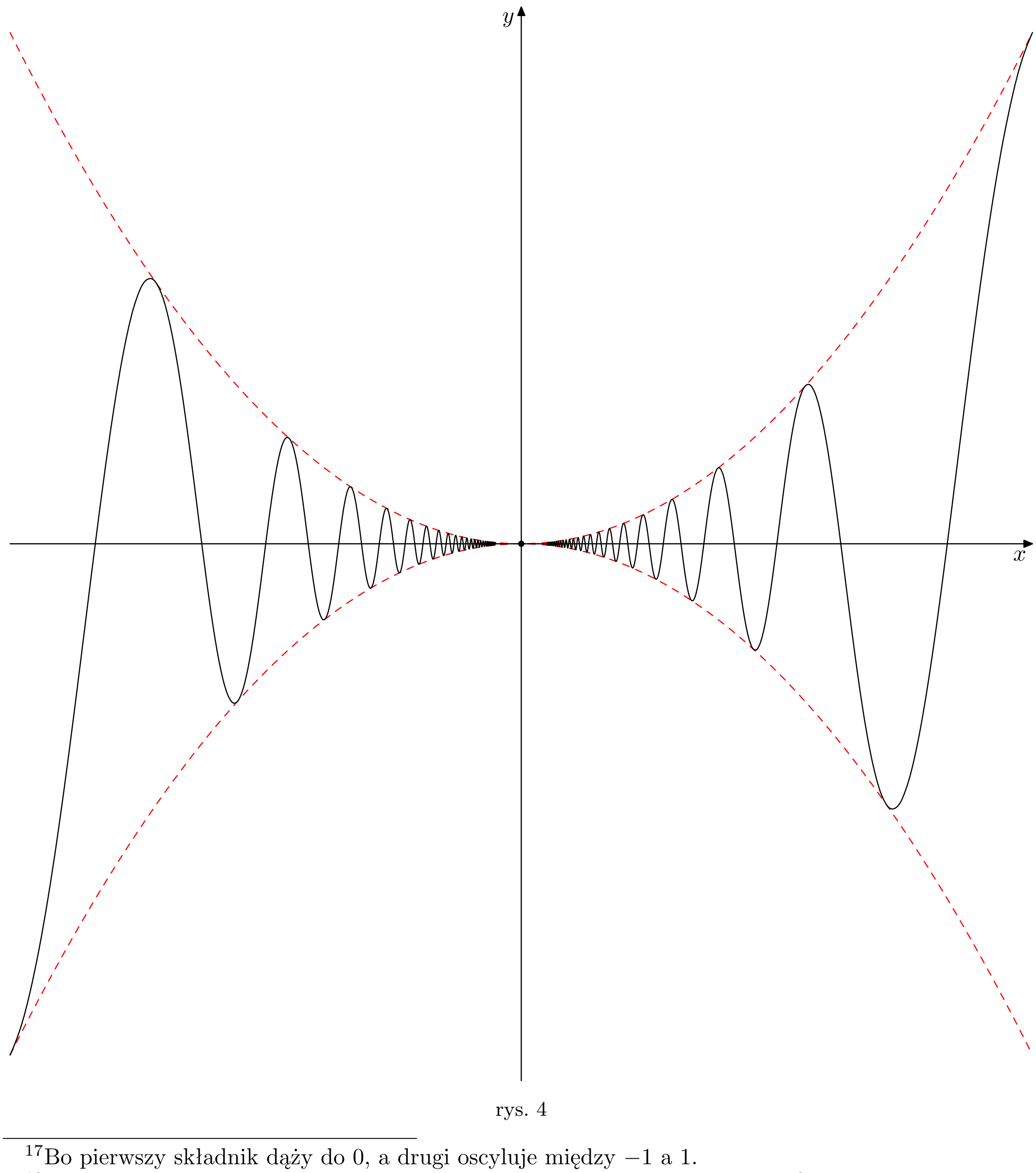
[16]Oczywiście różniczkowalność sprowadza się do różniczkowalności w zerze, bo poza zerem pochodna istnieje – można sobie zróżniczkować wzorek.

Natomiast dla $x \neq 0$ otrzymujemy przez zróżniczkowanie wzoru:

$$f_{37}'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2} = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\,,$$

co nie ma granicy w zerze[17].

Tak więc f_{37} jest różniczkowalna na całej prostej, ale f_{37}' jest nieciągła[18].



rys. 4

[17]Bo pierwszy składnik dąży do 0, a drugi oscyluje między -1 a 1.

[18]Drobna modyfikacja tej funkcji, na przykład przez zamianę $1/x$ na $1/x^2$ w argumencie sinusa, doprowadziłaby do funkcji różniczkowalnej, której pochodna jest nieograniczona w otoczeniu zera.

Poprawmy teraz funkcję f_{37} dodając do niej funkcję liniową $x/2$. Otrzymamy:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x=0 \end{cases} \qquad D_f=\mathbb{R}$$

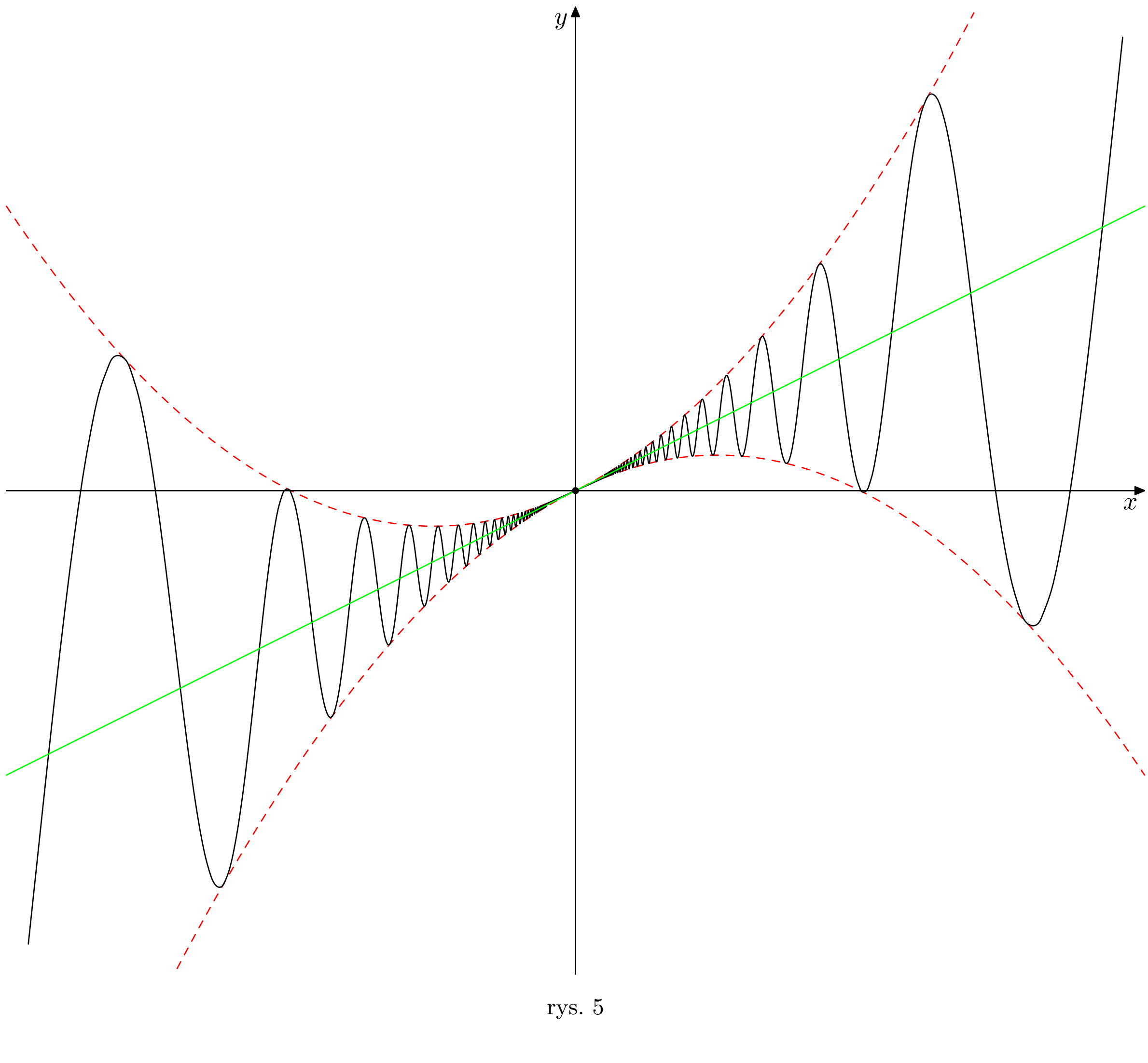
Wówczas wykres funkcji f koło zera jest mocno pofałdowany (rys. 5), ale ma styczną w punkcie $(0,0)$ – na rysunku jest ona zaznaczona na zielono.

Ponadto $f'(0)=1/2>0$, ale dla $x\neq 0$ mamy

$$f'(x)=\frac{1}{2}+2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},$$

co w pobliżu zera szaleńczo oscyluje z grubsza od $-1/2$ do $3/2$. Skoro f' w pobliżu zera przyjmuje wartości obu znaków, to sama funkcja f w pobliżu zera ma nieskończenie wiele przedzialików, w których jest rosnąca, i nieskończenie wiele przedzialików, w których jest malejąca.

Zatem w żadnym otoczeniu zera funkcja f nie jest rosnąca, pomimo że ma w zerze dodatnią pochodną.



rys. 5

Własność Darboux pochodnej.

Wiemy już, że pochodna funkcji różniczkowanej[19] nie musi być ciągła. Jednak intuicja ze wskazówką prędkościomierza, która nie może nagle przeskakiwać z miejsca na miejsce z pominięciem położeń pośrednich, ma swoje odbicie w odpowiednim twierdzeniu matematycznym[20]. Okazuje się bowiem, że pochodna, nawet nieciągła, od funkcji ciągłej zbyt dramatycznie nie odbiega, ma bowiem własność Darboux[21].

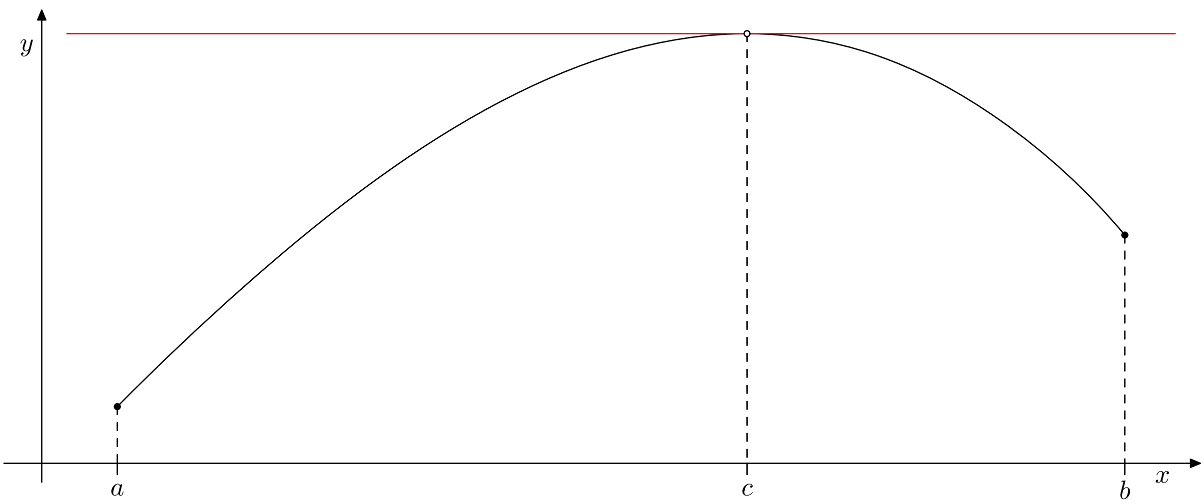
Zapamiętaj:

Pochodna funkcji różniczkowalnej na przedziale

ma własność Darboux.

Przedstawię najważniejszy element dowodu powyższego twierdzenia, a mianowicie wykażę, że jeśli funkcja f ma dodatnią pochodną w punkcie a i ujemną pochodną w punkcie $b>a$, to istnieje takie $c\in(a,\,b)$, że $f'(c)=0$.

Jeśli $f'(a)>0$, to bezpośrednio na prawo od a funkcja f osiąga wartości większe od $f(a)$, czyli funkcja f rozważana[22] na przedziale $[a,\,b]$ ma w punkcie a minimium lokalne (rys. 6). Analogicznie z warunku $f'(b)<0$ wynika, że f także w punkcie b ma minimum. Zatem punkt c, w którym f osiąga największą wartość na przedziale $[a,\,b]$, nie jest żadnym z końców tego przedziału. Wobec tego $f'(c)=0$.



rys. 6

[19]Nawet różniczkowalnej na całej prostej rzeczywistej.

[20]Trzeba uczciwie powiedzieć, że sama obserwacja zachowania wskazówki prędkościomierza nie jest ani dowodem, ani nawet silnym argumentem na własność Darboux pochodnych abstrakcyjnych funkcji. Sama wskazówka prędkościomierza jako część mechanizmu jest obiektem materialnym, który nie może się teleportować. I właśnie materialna natura tej wskazówki, a nie abstrakcyjne twierdzenie matematyczne mogłoby się tutaj manifestować.

[21]Czyli pomiędzy każdymi dwoma wartościami osiąga wszystkie wartości pośrednie.

[22]Rozważamy tylko wartości funkcji f na przedziale $[a,\,b]$, ale sama funkcja może być określona na większym przedziale, a wtedy a i b leżą wewnątrz dziedziny funkcji f. W konsekwencji f ma w tych punktach prawdziwą pochodną, a nie tylko jednostronną. Ale w dowodzie korzystamy tylko z pochodnych jednostronnych.