Pochodna funkcji (c.d.).

Dziś kilka przykładów zadań polegających na wyznaczaniu najmniejszej i największej wartości funkcji. Przypominam kluczowy fakt, który będzie w tych zadaniach wykorzystywany[1]:

Jeżeli funkcja ma w jakimś punkcie pochodną różną od zera, to nie ma w tym punkcie ekstremum.

Oczywiście będzie też nad nami czuwać twierdzenie Weierstrassa[2], bez którego cała procedura nie byłaby poprawna, gdyż nie mielibyśmy pewności, czy funkcja w ogóle osiąga największą i najmniejszą wartość.

Postawowy schemat poszukiwania najmniejszej i największej wartości funkcji ciągłej[3] na przedziale domkniętym jest następujący:

• Obliczamy pochodną funkcji.

• Porównujemy pochodną do zera – punkty, w których pochodna jest różna od zera wykluczamy – tam na pewno nie będzie ekstremum.

• W typowej sytuacji pozostaje nam do zbadania skończenie wiele punktów, które wpadają do jednej z trzech kategorii:
1° końce przedziału,
2° miejsca zerowe pochodnej,
3° punkty, w których pochodna może nie istnieć[4].

• Obliczamy i porównujemy wartości funkcji w wyżej opisanych punktach, a następnie wybieramy z tych wartości największą i najmniejszą.

Zanim przejdziemy do przykładów, rozwiejmy trzy mity.

MIT: Szukanie najmniejszej i największej wartości funkcji polega na obliczeniu i porównaniu wartości funkcji w miejscach zerowych pochodnej.

FAKT: Miejsca zerowe pochodnej to tylko jedna z trzch kategorii punktów, które należy rozważyć.

MIT: W miejscu zerowym pochodnej funkcja ma ekstremum.

FAKT: Niekoniecznie. Funkcja $f(x)=x^3$ ma zerową pochodną w $x=0$, ale nie ma tam ekstremum.

---

[1] Chociaż wyraźnie w takim sformułowaniu nie będziemy go cytować.

[2] Każda funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest ograniczona i osiąga swoje kresy.

[3] I do tego różniczkowalnej z nielicznymi wyjątkami.

[4] Zwracam uwagę na delikatną różnicę między użytym tu sformułowaniem, a bardziej narzucającym się sformułowaniem: "punkty, w których pochodna nie istnieje". Jednak takie sformułowanie jest zbyt kategoryczne, bo nakłada na nas obowiązek wykazania, że w istocie funkcja nie jest różniczkowalna w rozważanym punkcie. To wymaga na przykład wyliczania i porównywania pochodnych jednostronnych, a ewentualne wykazanie, że funkcja nie ma w jakimś punkcie pochodnej nie przybliża nas do rozwiązania zadania, bo i tak musimy pozostawić ten punkt na liście kandydatów do globalnego minimum i maksimum, a w konsekwencji wyliczyć wartość funkcji w tym punkcie.

MIT: W miejscach zerowych pochodnej trzeba zbadać (na przykład przez zbadanie znaku pochodnej na lewo i na prawo), czy jest tam lokalne minimum czy maksimum.

FAKT: Na ogół jest to działanie bez sensu, bo i tak musimy wpisać punkt na listę kandydatów do najmniejszej i największej wartości funkcji, wyliczyć wartość funkcji w tym punkcie i porównać z innymi wartościami. Wiedza, że jest tam lokalne maksimum lub minimum, na ogół w niczym nie pomaga. **ALE:** są wyjątkowe sytuacje, kiedy bezpośrednie porównanie wartości funkcji w różych punktach jest trudne lub praktycznie niemożliwe. Wówczas może pomóc zbadanie przebiegu funkcji[5].

499. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x+\left|x^2-x-12\right|$$

na przedziale $[-5,\,5]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^2-x-12=(x-4)\cdot(x+3)\,.$$

Stąd

$$\left|x^2-x-12\right|=\begin{cases} x^2-x-12 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,-3]\cup[4,\,+\infty) \\ -x^2+x+12 & \text{dla} \quad x\in(-3,\,4) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} x^2-12 & \text{dla} \quad x\in[-5,\,-3]\cup[4,\,5] \\ -x^2+2x+12 & \text{dla} \quad x\in(-3,\,4) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-5,\,5]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{dla} \quad x\in(-5,\,-3)\cup(4,\,5) \\ -2x+2 & \text{dla} \quad x\in(-3,\,4) \end{cases}$$

W punktach -3 i 4 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-5,\,-3)\cup(4,\,5)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2x=0$, co ma rozwiązanie $x=0$, które jednak nie należy do rozważanego zbioru $(-5,\,-3)\cup(4,\,5)$.

2° W przypadku $x\in(-3,\,4)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $-2x+2=0$, co ma rozwiązanie $x=1$, które należy do rozważanego przedziału $(-3,\,4)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -5 i 5,
- miejsce zerowe pochodnej: 1,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -3 i 4.

$$f(-5)=13\,,$$

[5] Pamiętajmy: w przedziałach, w których pochodna jest dodatnia, funkcja jest rosnąca. W przedziałach, w których pochodna jest ujemna, funkcja jest malejąca.

$$f(-3) = -3\,,$$
$$f(1) = 13\,,$$
$$f(4) = 4\,,$$
$$f(5) = 13\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -3 w punkcie -3, a wartość największą równą 13 w punktach -5, 1 i 5.

500. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem
$$f(x) = \sqrt{16x^2+8x+1} - x^2$$
na przedziale $[-3, 4]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że
$$f(x) = \sqrt{16x^2+8x+1} - x^2 = \sqrt{(4x+1)^2} - x^2 = |4x+1| - x^2$$
a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci
$$f(x) = \begin{cases} 4x+1-x^2 & \text{dla} \quad x \in [-1/4, 4] \\ -4x-1-x^2 & \text{dla} \quad x \in [-3, -1/4) \end{cases}$$
W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-3, 4]$ jest dana wzorem
$$f'(x) = \begin{cases} 4-2x & \text{dla} \quad x \in (-1/4, 4) \\ -4-2x & \text{dla} \quad x \in (-3, -1/4) \end{cases}$$
W punkcie $-1/4$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x \in (-1/4, 4)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $4-2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = 2$, które należy do rozważanego przedziału $(-1/4, 4)$.

2° W przypadku $x \in (-3, -1/4)$ równanie $f'(x) = 0$ sprowadza się do $-4-2x = 0$, co ma rozwiązanie $x = -2$, które należy do rozważanego przedziału $(-3, -1/4)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:
- końce przedziału: -3 i 4,
- miejsca zerowe pochodnej: -2 i 2,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-1/4$.

$$f(-3) = 2\,,$$
$$f(-2) = 3\,,$$
$$f(-1/4) = -1/16\,,$$
$$f(2) = 5\,,$$
$$f(4) = 1\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-1/16$ w punkcie $-1/4$, a wartość największą równą 5 w punkcie 2.

501. Rozważamy graniastosłupy prawidłowe o podstawie sześciokątnej i ustalonej objętości. Rozstrzygnąć, który z nich ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej. W odpowiedzi podać iloraz wysokości do krawędzi podstawy.

Rozwiązanie:

Niech V będzie ustaloną objętością, a a krawędzią podstawy graniastosłupa. Pole powierzchni podstawy jest wówczas równe $3\sqrt{3}\cdot a^2/2$, co daje wysokość równą

$$h=\frac{2V}{3\sqrt{3}\cdot a^2}\,.$$

Pole powierzchni całkowitej jest wówczas równe

$$P(a)=3\sqrt{3}\cdot a^2+6\cdot ah=3\sqrt{3}\cdot a^2+6\cdot a\cdot\frac{2V}{3\sqrt{3}\cdot a^2}=3\sqrt{3}\cdot a^2+\frac{4V}{\sqrt{3}\cdot a}\,.$$

Zauważmy, że[6]

$$\lim_{a\to 0^+}P(a)=\lim_{a\to+\infty}P(a)=+\infty\,.$$

Ponadto

$$P'(a)=6\sqrt{3}\cdot a-\frac{4V}{\sqrt{3}\cdot a^2}\,,$$

skąd $P'(a)=0$ dla

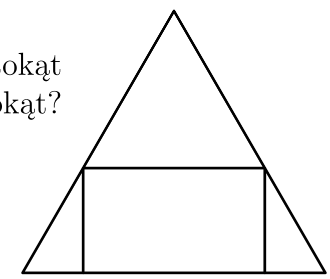
$$a=\sqrt[3]{\frac{2V}{9}}$$

i dla takiej właśnie długości krawędzi podstawy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa osiąga minimum. Wówczas

$$\frac{h}{a}=\frac{2V}{3\sqrt{3}\cdot a^3}=\frac{2V}{3\sqrt{3}\cdot 2V/9}=\sqrt{3}\,.$$

Odpowiedź: Najmniejsze pole powierzchni ma graniastosłup, w którym stosunek wysokości do krawędzi podstawy jest równy $\sqrt{3}$.

502. W trójkąt równoboczny o polu 1 chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?



Rozwiązanie:

Niech a będzie długością boku danego trójkąta równobocznego, a h jego wysokością. Jeżeli wpisywany prostokąt ma wysokość $x\in(0,\,h)$, to jego podstawa ma długość $a\cdot\left(1-\dfrac{x}{h}\right)$, co ustalamy na podstawie prostych rozważań geometrycznych.

[6] W tym zadaniu szukamy minimium funkcji na przedziale otwartym $(0,\,+\infty)$. Musimy więc poznać zachowanie funkcji przy argumencie dążacym do konców przedziału.

Wówczas pole prostokąta jest równe
$$P(x)=x\cdot a\cdot\left(1-\frac{x}{h}\right).$$
Zauważmy, że
$$\lim_{x\to 0^+}P(x)=\lim_{x\to h^-}P(x)=0\,,$$
a ponadto
$$P'(x)=a\cdot\left(1-\frac{x}{h}\right)-\frac{x\cdot a}{h}=a-\frac{2\cdot x\cdot a}{h}=a\cdot\left(1-\frac{2x}{h}\right).$$
Wobec tego $P'(x)=0$ dla $x=h/2$, co prowadzi do maksymalnej wartości pola prostokąta równej
$$P(h/2)=\frac{h}{2}\cdot a\cdot\left(1-\frac{h/2}{h}\right)=\frac{h}{2}\cdot a\cdot\frac{1}{2}=\frac{ah}{2}\cdot\frac{1}{2}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$
W powyższych rachunkach skorzystaliśmy z podanego w treści zadania założenia, że trójkąt równoboczny ma pole $1=ah/2$.

Odpowiedź: Największe możliwe pole prostokąta wynosi 1/2.

503. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[8]{x^2+1029}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{C}\,,$$
gdzie $C=98$ **(wersja trudniejsza)** lub $C=48$ **(wersja łatwiejsza).**

Rozwiązanie:

Rozwiązanie wersji łatwiejszej:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia
$$a^8-b^8=\left(a^4-b^4\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)=\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)=$$
$$=(a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^4+b^4\right),$$
który przy założeniu $a+b\neq 0$ można zapisać w postaci
$$a-b=\frac{a^8-b^8}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a^4+b^4)}.$$
Przyjmując $a=\sqrt[8]{x^2+1029}$ oraz $b=\sqrt[8]{y^2+1029}$, zauważamy, że $a+b>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:
$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[8]{x^2+1029}-\sqrt[8]{y^2+1029}\right|=$$
$$=\left|\frac{(x^2+1029)-(y^2+1029)}{\left(\sqrt[8]{x^2+1029}+\sqrt[8]{y^2+1029}\right)\left(\sqrt[4]{x^2+1029}+\sqrt[4]{y^2+1029}\right)\left(\sqrt{x^2+1029}+\sqrt{y^2+1029}\right)}\right|=$$
$$=\frac{|x^2-y^2|}{\left(\sqrt[8]{x^2+1029}+\sqrt[8]{y^2+1029}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^2+1029}+\sqrt[4]{y^2+1029}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1029}+\sqrt{y^2+1029}\right)}=$$

$$=\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[8]{x^2+1029}+\sqrt[8]{y^2+1029}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^2+1029}+\sqrt[4]{y^2+1029}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1029}+\sqrt{y^2+1029}\right)}\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}<\sqrt{x^2+1029}+\sqrt{y^2+1029}\,,$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+1029}+\sqrt{y^2+1029}}<1\,.$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x^2+1029}+\sqrt[8]{y^2+1029}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[8]{0+1029}+\sqrt[8]{0+1029}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt[8]{1029}}\,.$$

Analogicznie

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+1029}+\sqrt[4]{y^2+1029}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[4]{0+1029}+\sqrt[4]{0+1029}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt[4]{1029}}\,.$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[8]{x^2+1029}+\sqrt[8]{y^2+1029}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^2+1029}+\sqrt[4]{y^2+1029}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1029}+\sqrt{y^2+1029}\right)}=$$

$$=|x-y|\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{x^2+1029}+\sqrt[8]{y^2+1029}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+1029}+\sqrt[4]{y^2+1029}}\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+1029}+\sqrt{y^2+1029}}\leqslant$$

$$\leqslant|x-y|\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt[8]{1029}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt[4]{1029}}\cdot 1=\frac{|x-y|}{4\cdot\sqrt[8]{1029^3}}\leqslant\frac{|x-y|}{4\cdot\sqrt[8]{1024^3}}=\frac{|x-y|}{4\cdot\sqrt[8]{2^{30}}}=\frac{|x-y|}{4\cdot\sqrt[4]{2^{15}}}=$$

$$=\frac{|x-y|}{4\cdot\sqrt[4]{2^8}\cdot\sqrt[4]{2^7}}=\frac{|x-y|}{4\cdot4\cdot\sqrt[4]{128}}=\frac{|x-y|}{16\cdot\sqrt[4]{128}}\leqslant\frac{|x-y|}{16\cdot\sqrt[4]{81}}=\frac{|x-y|}{16\cdot3}=\frac{|x-y|}{48}\,.$$

Rozwiązanie wersji trudniejszej:

Pominąwszy trywialny przypadek $x=y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|\cdot|f'(c)|\,,$$

gdzie c leży pomiędzy x i y.

Wystarczy więc wykazać, że $|f'(x)|\leqslant1/98$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Przyjmując[7]

$$g(x)=f'(x)=\frac{x}{4\cdot(x^2+1029)^{7/8}}$$

otrzymujemy

$$\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{4\cdot(x^2+1029)^{7/8}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{-3/4}}{4\cdot(1+1029\cdot x^{-2})^{7/8}}=0\,.$$

[7] W celu uniknięcia pojęcia pochodnej drugiego rzędu.

Zauważmy, że g jest różniczkowalna na całej prostej, a jej pochodna jest dana wzorem

$$g'(x)=\frac{1}{4\cdot\left(x^2+1029\right)^{7/8}}-\frac{7x^2}{16\cdot\left(x^2+1029\right)^{15/8}}\,.$$

Rozwiązujemy równanie na zerowanie się tej pochodnej:

$$\frac{1}{4\cdot\left(x^2+1029\right)^{7/8}}=\frac{7x^2}{16\cdot\left(x^2+1029\right)^{15/8}}\,,$$

$$4\cdot\left(x^2+1029\right)=7x^2\,,$$

$$4\cdot 1029=3x^2\,,\qquad 4\cdot 3\cdot 343=3x^2\,,\qquad 4\cdot 7^3=x^2\,,\qquad x=\pm 14\cdot\sqrt{7}\,.$$

Wyliczamy wartość funkcji g w miejscach zerowych pochodnej:

$$g\left(\pm 14\cdot\sqrt{7}\right)=\frac{\pm 14\cdot\sqrt{7}}{4\cdot\left((\pm 14\cdot\sqrt{7})^2+1029\right)^{7/8}}=\pm\frac{7\cdot\sqrt{7}}{2\cdot\left(4\cdot 7^3+3\cdot 7^3\right)^{7/8}}=$$

$$=\pm\frac{7\cdot\sqrt{7}}{2\cdot\left(7^4\right)^{7/8}}=\pm\frac{7\cdot\sqrt{7}}{2\cdot 7^{7/2}}=\pm\frac{1}{98}\,.$$

Stąd wynika, że funkcja g przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio $-1/98$ i $1/98$, skąd $|g(x)|\leqslant 1/98$ dla każdej liczby rzeczywistej x.