Pochodna funkcji (c.d.).

Pochodna a ekstrema funkcji.

DEFINICJA: Funkcja f osiąga w punkcie x_0 swojej dziedziny[1] **maksimum lokalne**[2], jeżeli

$$\underset{\delta>0}{\exists} \underset{x\in D_f\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)}{\forall} f(x_0)\geqslant f(x)$$

czyli gdy wartość funkcji w punkcie x_0 jest nie mniejsza od wartości w pobliskich punktach. Analogicznie, funkcja f osiąga w punkcie x_0 **minimum lokalne**, jeżeli

$$\underset{\delta>0}{\exists} \underset{x\in D_f\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)}{\forall} f(x_0)\leqslant f(x)$$

czyli gdy wartość funkcji w punkcie x_0 jest nie większa od wartości w pobliskich punktach.

Jeżeli będziemy chcieli odwołać się do największej[3] (odpowiednio: najmniejszej) wartości funkcji na jakimś zbiorze, to tak właśnie powiemy: **największa/najmniejsza wartość funkcji takiej na zbiorze siakim.** Ewentualnie możemy powiedzieć, że chodzi nam o maksimum/minimum **globalne** (czyli na całej dziedzinie funkcji).

Jeśli chcemy zaznaczyć, że wartość funkcji w punkcie x_0 jest większa niż w innych punktach, to powiemy o **maksimum właściwym**[4]. Analogiczna terminologia dotyczy minimów.

Funkcja stała ma w każdym punkcie swojej dziedziny jednocześnie maksimum (lokalne) i minimum (lokalne). Jak również maksimum globalne i minimum globalne.

Powiemy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **ekstremum**[5], jeżeli ma tam maksimum (lokalne) lub minimum (lokalne).

TWIERDZENIE: Jeżeli funkcja f jest ma w punkcie x_0 ekstremum i jest w tym punkcie różniczkowalna[6], to $f'(x_0)=0$.

---

[1] Na potrzeby tej definicji można dopuścić, że dziedzina funkcji f jest dowolnym niepustym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

[2] Wprawdzie przyjęło się rozumieć przez samo słowo "maksimum" właśnie "maksimum lokalne", ale nie zaszkodzi używać słowa "lokalne" dla uniknięcia ewentualnych nieporozumień.

[3] Zwrócić należy uwagę, że słowo "największy" wiąże się z nierównością słabą, a nie ostrą. Na przykład funkcja stała osiąga największą wartość w każdym punkcie swojej dziedziny. To odbiega od tego, co rozumie się w języku potocznym, gdzie określenie "mój najstarszy syn" sugeruje, że jest on starszy od wszystkich pozostałych synów (których na dodatek jest więcej niż zero, bo raczej nie użyje się określenia "najstarszy" w odniesieniu do jedynaka). Tymczasem przyjmując terminologię matematyczną, pracownik firmy, w której wszyscy mają taką samą pensję, ma pełne prawo uskarżać się, że jego zarobki są najniższe (co firma może odeprzeć argumentem, że przecież zarabia on najwięcej ze wszystkich).

[4] Można więc użyć określeń "maksimum właściwe lokalne" oraz "maksimim właściwe globalne".

[5] Jest to sytuacja analogiczna do pojęcia monotoniczności, gdzie do jednego worka wrzucamy funkcje niemalejące i nierosnące.

[6] Przypominam, że założenie o różniczkowalności w punkcie x_0 mieści w sobie założenie, że pewne otoczenie punktu x_0 jest zawarte w dziedzinie funkcji f, czyli $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset D_f$ dla pewnego $\delta>0$.

Dowód:
Przeprowadzimy dowód w przypadku, gdy funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum[7].

Korzystając z nierówności $f(x) \leqslant f(x_0)$ dla x bliskich x_0 otrzymujemy

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\leqslant 0}}{\underbrace{x-x_0}_{>0}} \leqslant 0$$

oraz

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\leqslant 0}}{\underbrace{x-x_0}_{<0}} \geqslant 0\,.$$

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w x_0, to

$$f'(x_0) = f'(x_0^+) \leqslant 0 \qquad \text{oraz} \qquad f'(x_0) = f'(x_0^-) \geqslant 0\,,$$

skąd $f'(x_0) = 0$, co kończy dowód twierdzenia.

Zapamiętaj:

Jeżeli funkcja ma w jakimś punkcie pochodną różną od zera,
to nie ma w tym punkcie ekstremum.

Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej.

Zanim sformułuję twierdzenie Lagrange'a, podam jego interpretację komunikacyjną. Samochód pokonał trasę z Wrocławia do Opola (przyjmijmy w zaokrągleniu, że jest to odległość 100 km) w ciągu godziny. Wówczas jego średnia prędkość wyniosła 100 km/h. Na razie nic szczególnego... Ale w czasie podróży musiał istnieć moment, w którym prędkość chwilowa wynosiła dokładnie 100 km/h.

Przekładając to na język matematyczny: Funkcja różniczkowalna na przedziale ma w jakimś punkcie pochodną równą ilorazowi różnicowemu[8] liczonemu na całym przedziale.

Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej: Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale domkniętym $[a, b]$, różniczkowalną wewnątrz[9] tego przedziału, czyli na przedziale otwartym (a, b). Wówczas istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że

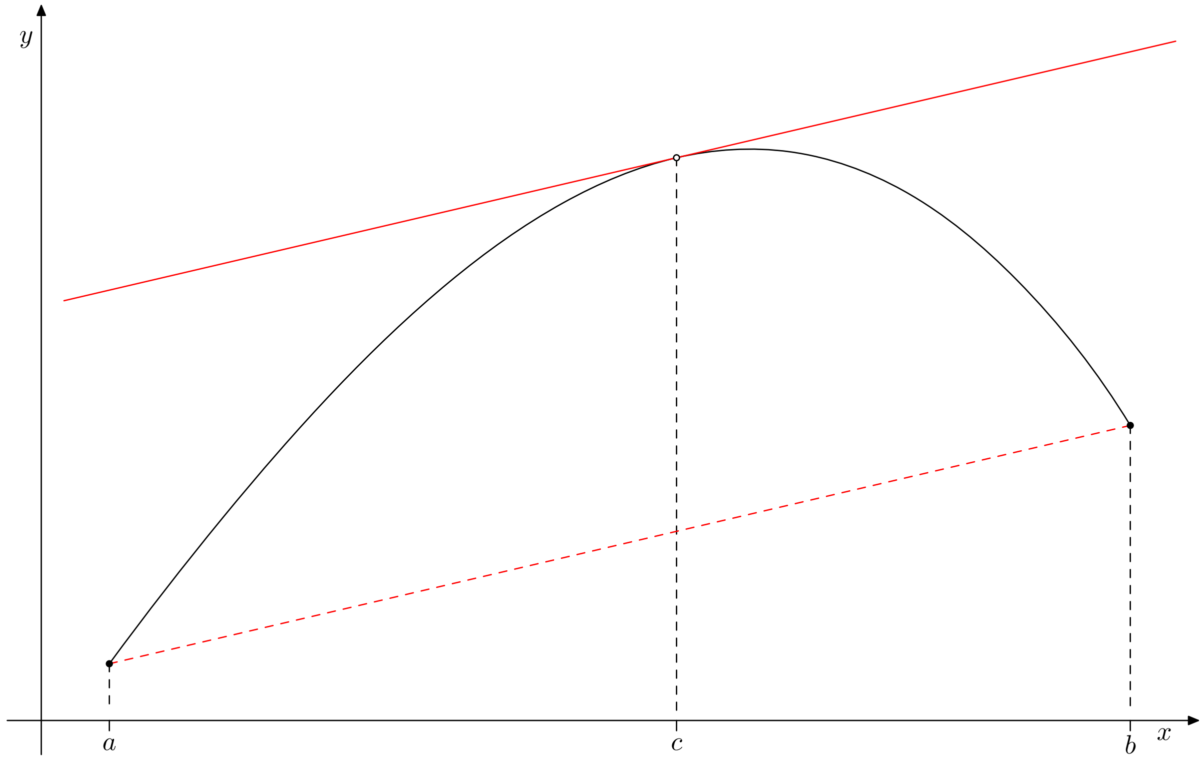
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$

[7]Przypadek minimum rozważa się analogicznie, gdyż różni się on tylko kierunkiem nierówności.

[8]Czyli średniemu przyrostowi wartości funkcji na jednostkę argumentu.

[9]Na końcach przedziału wystarczy sama ciągłość. Istnienia pochodnych jednostronnych na końcach przedziału nie zakładamy, bo nie jest potrzebne.

Geometrycznie: Istnieje punkt wykresu funkcji, w którym prosta styczna jest równoległa do siecznej[10] przechodzącej przez punkty wykresu odpowiadające końcom przedziału (rys. 1).



rys. 1

Dowów twierdzenia Lagrange'a rozpoczniemy od przypadku, w którym funkcja osiąga taką samą wartość na obu końcach przedziału:

TWIERDZENIE ROLLE'A: Niech f będzie taką funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$, różniczkowalną na (a, b), że $f(a)=f(b)$. Wówczas istnieje taki punkt $c\in(a, b)$, że $f'(c)=0$.

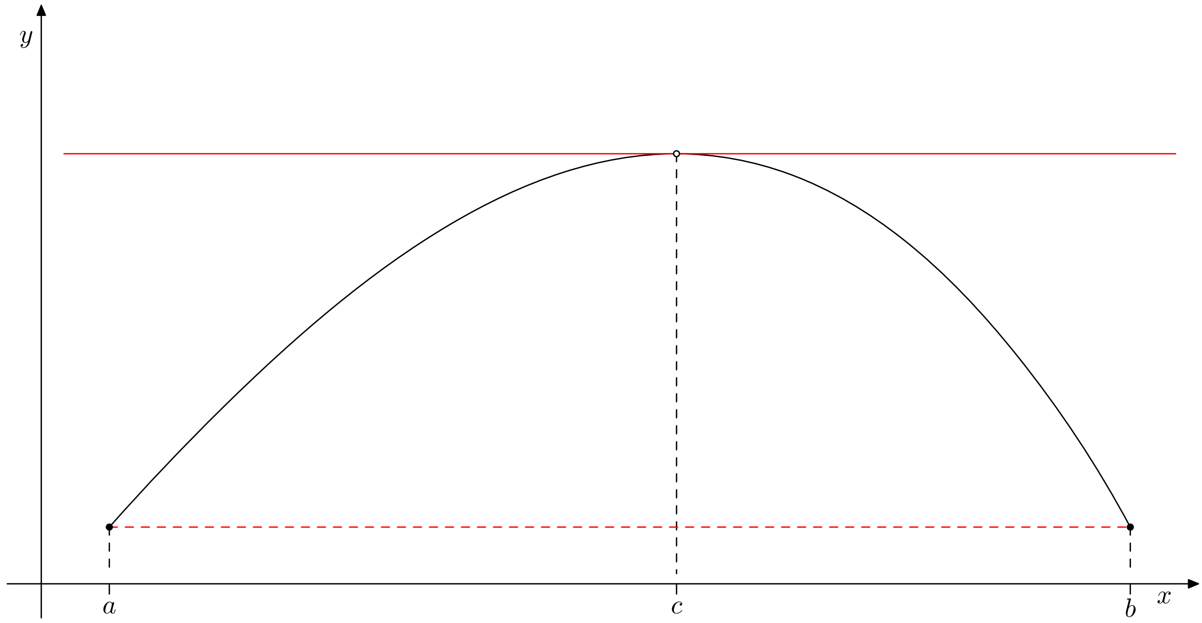
Dowód:
Ponieważ funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$, osiąga ona w tym przedziale wartość największą. Niech c będzie punktem[11], w którym ta największa wartość jest osiągana (rys. 2). Patrząc na rysunek 2 chciałoby się powiedzieć: "Skoro w punkcie c funkcja ma ekstremum[12], to jej pochodna w tym punkcie jest równa 0 i tym samym dowód jest zakończony." Ale nie tak szybko... Może się bowiem okazać, że największa

[10] Przypominam: sieczna to prosta poprowadzona przez pewne dwa punkty wykresu. Natomiast cięciwa to odcinek o końcach w tych punktach wykresu. Sieczna jest więc prostą będącą przedłużeniem cięciwy. Na rysunku 1 jest narysowana cięciwa (bo wydało mi się, że tak jest ładniej).

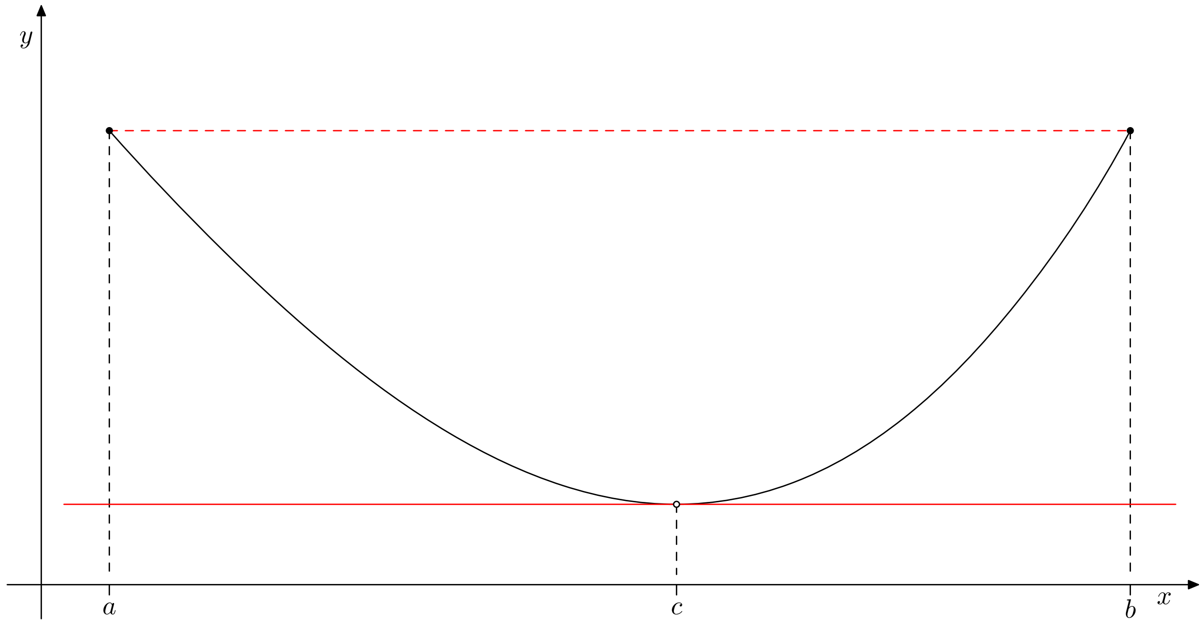
[11] Punktów, w których funkcja osiąga największą wartość może być wiele. Faktycznie więc c jest jednym z punktów, w których f osiąga największą wartość.

[12] A dokładniej: maksimum.

wartość funkcji jest osiągana na końcach przedziału, czyli w punktach a i b, a tam funkcja nie jest różniczkowalna[13].



rys. 2



rys. 3

[13]Bo nie zakładamy nawet namiastki różniczkowalności na końcach przedziału, choćby w postaci istnienia pochodnych jednostronnych. A nawet gdybyśmy założyli istnienie pochodnych jednostronnych na końcach przedziału, to nie musiałyby być one równe zeru. Widać to wyraźnie na rysunku 3, gdzie funkcja osiąga maksimum na końcach przedziału, ale jednostronne styczne do wykresu funkcji w punktach odpowiadających a i b nie są poziome. Owe jednostronne styczne nie są naszkicowane, żeby nie przeładowywać rysunku zbyt wieloma elementami – trzeba je sobie wyobrazić.

Dowód jest więc zakończony, gdy wybrany[14] punkt c nie jest żadnym z końców przedziału. Jeśli natomiast f osiąga wartość największą na końcach przedziału, czyli mamy sytuację, którą w uproszczeniu można naszkicować jak na rysunku 3, to za punkt c przyjmiemy punkt, w którym f osiąga wartość najmniejszą. Skoro w c jest minimum, to pochodna funkcji f w tym punkcie jest równa 0. Aj... Niezupełnie. Mogłoby się bowiem okazać, że i tym razem punkt c jest jednym z końców przedziału. Ale wówczas na końcach przedziału funkcja f osiągałaby wartość największą i jednocześnie osiągałaby tam wartość najmniejszą, byłaby więc funkcją stałą. A w takiej sytuacji mielibyśmy $f'(c)=0$ dla każdego $c\in(a,b)$.

Zakończyliśmy więc dowód twierdzenia Rolle'a. Wróćmy teraz do dowodu twierdzenia Lagrange'a, które przez odpowiednią modyfikację funkcji sprowadzimy do twierdzenia Rolle'a.

Niech, jak w założeniach twierdzenia Lagrange'a, f będzie funkcją ciągłą na przedziale domkniętym $[a,b]$, różniczkowalną na (a,b). Poprawmy funkcję f tak, aby jej wartości na końcach przedziału się wyrównały. Osiągniemy to przez odjęcie funkcji liniowej o współczynniku kierunkowym równym ilorazowi rożnicowemu funkcji f na przedziale $[a,b]$. Innymi słowy, wprowadzamy funkcję pomocniczą

$$g(x)=f(x)-x\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$

Jeśli ktoś nie wierzy, że ta funkcja ma równe wartości na końcach przedziału, może to sprawdzić bezpośrednio:

$$g(a)=f(a)-a\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(b-a)\cdot f(a)-a\cdot(f(b)-f(a))}{b-a}=\frac{b\cdot f(a)-a\cdot f(b)}{b-a}\,,$$

$$g(b)=f(b)-b\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(b-a)\cdot f(b)-b\cdot(f(b)-f(a))}{b-a}=\frac{-a\cdot f(b)+b\cdot f(a)}{b-a}\,.$$

Wobec tego na mocy twierdzenia Rolle'a istnieje takie $c\in(a,b)$, że $g'(c)=0$. Biorąc pod uwagę, że

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,,$$

otrzymujemy

$$f'(c)=g'(c)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,,$$

co kończy dowód twierdzenia Lagrange'a.

To, że pochodna funkcji w jakimś punkcie okazuje się być równa określonej wartości[15], jest może i ciekawe, ale w zastosowanich twierdzenia Lagrange'a wcale nie chodzi o to, aby ekscytować się przyjmowaniem przez pochodną jakiejś wartości. Przeciwnie, chodzi o to, aby mając jakąś wiedzę o zachowaniu[16] się pochodnej, wyciągnąć jakieś wnioski dotyczące zachowania samej funkcji. W tym celu możemy przepisać tezę twierdzenia

[14] Wybrany jako punkt, w którym f osiąga największą wartość.

[15] W tym wypadku ilorazowi różnicowemu.

[16] A dokładniej: możliwych wartościach pochodnej.

Lagrange'a w postaci mniej symetrycznej, ale za to bardziej bezpośrednio odnoszącej się do wartości funkcji f:

$$f(b)=f(a)+f'(c)\cdot(b-a)\,.$$

Należy zwrócić uwagę, że w powyższym wzorze nie jest istotne założenie $a<b$, bo wzór się nie zmienia po zamianie miejscami literek a i b. Możemy też przepisać ten wzór z innymi oznaczeniami, sugerującymi, że jeden punkt jest ustalony, a drugi się zmienia:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0+t(x-x_0))\cdot(x-x_0)\,.$$

Występujące w argumencie pochodnej wyrażenie $x_0+t(x-x_0)$ daje przy $t\in(0,1)$ jakiś punkt pomiędzy x_0 i x.

Jako proste wnioski tego typu[17] sformułujmy następujące obserwacje:

• Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na przedziale[18] otwartym I oraz $f'(x)>0$ dla każdego $x\in I$, to f jest rosnąca na przedziale I.

Dowód:

Jeśli $a<b$ oraz $a,b\in I$, to

$$f(b)=f(a)+\underbrace{f'(c)}_{>0}\cdot\underbrace{(b-a)}_{>0}>f(a)\,.$$

• Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na przedziale otwartym I oraz $f'(x)<0$ dla każdego $x\in I$, to f jest malejąca na przedziale I.

• Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na przedziale otwartym I oraz $f'(x)\geqslant 0$ dla każdego $x\in I$, to f jest niemalejąca na przedziale I.

• Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na przedziale otwartym I oraz $f'(x)\leqslant 0$ dla każdego $x\in I$, to f jest nierosnąca na przedziale I.

Do tego dodajmy wnioski w drugą stronę wynikające z prześledzenia przejścia granicznego w definicji pochodnej:

• Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na przedziale otwartym I oraz jest niemalejąca na przedziale I, to $f'(x)\geqslant 0$ dla każdego $x\in I$.

• Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na przedziale otwartym I oraz jest nierosnąca na przedziale I, to $f'(x)\leqslant 0$ dla każdego $x\in I$.

• Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na przedziale otwartym I oraz jest rosnąca na przedziale I, to nie musi być $f'(x)>0$ dla każdego $x\in I$. Przykład: $f(x)=x^3$ na $\mathbb{R}$.

Zastosowania twierdzenia Lagrange'a, czyli wnioskowanie o funkcji na podstawie pochodnej, to jak wnioskowanie o położeniu samochodu na podstawie jakichś informacji o jego prędkości. Jeśli samochód wyjechał z Wrocławia o godzinie 12:00 i jeśli wiemy, że przez cały czas jego prędkość mieści się w zakresie od 50 km/h do 100 km/h, to o godzinie 13:00 będzie się on znajdował pomiędzy 50 a 100 kilometrów od Wrocławia, a o godzinie 15:00 pomiędzy 150 a 300 kilometrów od Wrocławia.

[17]Czyli wnioski typu: jeśli pochodna jest taka a taka, to sama funkcja jest siaka.

[18]Przedział może być ograniczony albo nieograniczony, nawet $I=\mathbb{R}$.

Na zakończenie dzisiejszego wykładu przyjrzyjmy się trzem zadaniom wykorzystującym twierdzenie Lagrange'a.

481. Udowodnić nierówności
$$\frac{1}{29} < \operatorname{arctg} 12 - \operatorname{arctg} 7 < \frac{1}{10}\,.$$

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x) = \operatorname{arctg} x$ na przedziale $[7, 12]$ wynika istnienie takiej liczby $c \in (7, 12)$, że
$$\operatorname{arctg} 12 - \operatorname{arctg} 7 = (12-7) \cdot f'(c) = 5 \cdot f'(c)\,.$$

Ponieważ
$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}\,,$$
z nierówności $7 < c < 12$ otrzymujemy
$$\frac{1}{29} = \frac{5}{145} = \frac{5}{12^2+1} \quad < \quad \operatorname{arctg} 12 - \operatorname{arctg} 7 = \frac{5}{c^2+1} \quad < \quad \frac{5}{7^2+1} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}\,,$$
co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

482. Niech funkcja $f : [2, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem
$$f(x) = \frac{1}{x^4}\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [2, \infty)$ zachodzi nierówność
$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{|x-y|}{8}\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y \geqslant 2$:
$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x^4} - \frac{1}{y^4}\right| = \left|\frac{y^4-x^4}{x^4y^4}\right| = \frac{|x-y| \cdot (x^3+x^2y+xy^2+y^3)}{x^4y^4} =$$
$$= |x-y| \cdot \left(\frac{x^3}{x^4y^4} + \frac{x^2y}{x^4y^4} + \frac{xy^2}{x^4y^4} + \frac{y^3}{x^4y^4}\right) = |x-y| \cdot \left(\frac{1}{xy^4} + \frac{1}{x^2y^3} + \frac{1}{x^3y^2} + \frac{1}{x^4y}\right) \leqslant$$
$$\leqslant |x-y| \cdot \left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^5}\right) = |x-y| \cdot \frac{4}{2^5} = |x-y| \cdot \frac{1}{8}\,,$$
co kończy dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x, y \geqslant 2$.

Nieco inna postać oszacowań:
$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x^4} - \frac{1}{y^4}\right| = \left|\frac{y^4-x^4}{x^4y^4}\right| = \frac{|x-y| \cdot (x+y) \cdot (x^2+y^2)}{x^4y^4} = |x-y| \cdot \frac{x+y}{xy} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^3y^3} =$$
$$= |x-y| \cdot \left(\frac{x}{xy} + \frac{y}{xy}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{x^3y^3} + \frac{y^2}{x^3y^3}\right) = |x-y| \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{xy^3} + \frac{1}{x^3y}\right) \leqslant$$

$$\leqslant |x-y| \cdot \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}\right) = |x-y| \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{2^4} = |x-y| \cdot \frac{1}{8}.$$

Sposób II:

Dowodzona nierówność jest oczywista w przypadku $x=y$, natomiast dla $x \neq y$ stosujemy do funkcji f twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej. Na mocy tego twierdzenia istnieje taka liczba c pomiędzy x i y, a więc spełniająca nierówność $c>2$, że

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = |f'(c)| = \left|\frac{-4}{c^5}\right| = \frac{4}{c^5} < \frac{4}{2^5} = \frac{1}{8},$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

483. Funkcja różniczkowalna $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ spełnia warunki $f(0)=1$ i $f(1)=e$. Rozstrzygnąć, czy stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej x, że

$$f(x)=f'(x).$$

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Wynika.

Rozważmy funkcję g określoną wzorem $g(x)=\ln f(x)$. Wówczas $g(0)=0$ i $g(1)=1$, skąd na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej $c\in(0,1)$, że

$$g'(c)=\frac{g(1)-g(0)}{1-0}=1.$$

Z drugiej strony

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)},$$

skąd

$$\frac{f'(c)}{f(c)}=1,$$

czyli

$$f'(c)=f(c).$$