Pochodna funkcji (c.d.).

W ramach prezentowania wybranych elementów teorii rozpocznę dzisiejszy wykład od dwóch dowodów. Pierwszy dotyczy ciągłości funkcji w punktach różniczkowalności, a drugi podanego wczoraj wzoru na pochodną iloczynu.

TWIERDZENIE: Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna[1] w punkcie x_0, to jest w tym punkcie ciągła.
Innymi słowy: Różniczkowalność jest warunkiem silniejszym od ciągłości.

Dowód:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\Big(f(x_0)+f(x)-f(x_0)\Big) = \lim_{x\to x_0}\left(f(x_0)+(x-x_0)\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) =$$
$$= f(x_0)+0\cdot f'(x_0) = f(x_0)\ .$$

Jako przykład przypomnijmy funkcję **z wykładu 20:**

$$f_{14}(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla } x\in\mathbb{Q} \\ -x^2 & \text{dla } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases} \qquad D_{f_{14}}=\mathbb{R}$$

Funkcja ta jest nieciągła poza zerem, więc jest tam nieróżniczkowalna. Natomiast w zerze funkcja jest różniczkowalna, gdyż

$$f'_{14}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_{14}(x)-f_{14}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\pm x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\pm x=0\,,$$

co wynika z oszacowań

$$-|x|\leqslant \pm x\leqslant |x|$$

i twierdzenia o trzech funkcjach. Znak "$\pm$" jest znakiem "$+$" albo "$-$" w zależności od tego, czy x jest liczbą wymierną, czy nie.

Widzimy więc, że różniczkowalność w jednym punkcie nie wymusza ciągłości w żadnym punkcie oprócz niego.

WZÓR NA POCHODNĄ ILOCZYNU: Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie x_0, to funkcja fg też jest różniczkowalna w tym punkcie i zachodzi równość

$$(fg)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)\ .$$

Dowód:

$$(fg)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x)+f(x_0)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)\ .$$

W powyższym rachunku skorzystaliśmy z ciągłości funkcji g w punkcie x_0, która to ciągłość wynika z założenia różniczkowalności.

[1] W założeniu różniczkowalności w punkcie x_0 mieści się także założenie, że punkt x_0 jest punktem wewnętrznym dziedziny funkcji f.

Styczna do wykresu funkcji.

Co to jest styczna[2], każdemu się wydaje, że wie. Ale ponieważ w geometrii przede wszystkim mówi się o prostej stycznej do okręgu, wiele osób błędnie myśli, że istotą styczności jest posiadanie przez prostą dokładnie jednego punktu wspólnego z krzywą, do której ma być styczna.

Tymczasem parabola o równaniu $y=x^2$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z każdą prostą pionową, chociaż prostej tej za styczną nie uważamy. Z kolei styczna do krzywej o równaniu $y=x^3$ w dowolnym punkcie oprócz $(0,0)$, przecina tę krzywą w jeszcze jednym punkcie oprócz punktu styczności. A jeśli krzywa jest mocno pozawijana lub pofalowana, to styczna może mieć z nią nieskończenie wiele punktów wspólnych.

O co chodzi z tą styczną? Otóż prosta styczna do danej krzywej w danym punkcie tej krzywej to prosta, która przechodzi przez ten punkt, a ponadto ma kierunek zgodny z kierunkiem tej krzywej w tym punkcie, czyli jest to taka prosta, która najlepiej przybliża tę krzywą w pobliżu punktu styczności. To jest oczywiście tylko intuicyjny opis, ale zanim przejdziemy do ściślejszej definicji, musimy sobie wyjaśnić, o co nam chodzi.

Gdybyśmy chcieli narysować prostą, która jest prawie styczna do krzywej w ustalonym punkcie, moglibyśmy wybrać drugi punkt na tej krzywej bardzo blisko rozważanego punktu i poprowadzić prostą przez te dwa punkty. W skrócie: moglibyśmy rozważyć sieczną przez dany punkt i inny punkt bardzo blisko niego. Jeżeli otrzymana prosta prawie nie zależy od wyboru bardzo bliskiego punktu, to jest to prawie styczna do krzywej. To powtarzające się "prawie" sugeruje jakieś przejście graniczne.

Nie zapytaliście, co to jest krzywa. To dobrze, że nie zapytaliście. Bo nie czas i miejsce, aby na tak postawione pytanie precyzyjnie odpowiadać. Nas będą interesować krzywe będące wykresami funkcji, a właściwie to słowo krzywa jest tu pewnym nadużyciem, bo wykresu funkcji f_{14} raczej krzywą nie nazwiemy, chociaż o stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $(0,0)$ możemy mówić.

Tak więc dla danej funkcji f i punktu x_0 z jej dziedziny, styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ będziemy chcieli[3] nazwać granicę[4] siecznych przechodzących przez punkty $(x_0, f(x_0))$ oraz $(x_1, f(x_1))$, gdy x_1 dąży do x_0.

Prosta przechodząca przez punkty $(x_0, f(x_0))$ oraz $(x_1, f(x_1))$ ma współczynnik kierunkowy będący ilorazem różnicowym funkcji f, a mianowicie

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0},$$

wobec czego równanie tej prostej wygląda następująco:

$$y=f(x_0)+(x-x_0)\cdot\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}.$$

[2]Dokładniej: prosta styczna do krzywej.

[3]Deklaruję jedynie szczere chęci, bo nie wiemy przecież, czy tak określona styczna będzie w ogóle istniała.

[4]Nie definiuję precyzyjnie, czym jest granica prostych. Odwołuję się tu raczej do intuicji.

Jeśli teraz x_1 będzie dążyło do x_0, to w granicy powyższe równanie prostej przyjmie postać

$$y = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0)\,,$$

pod warunkiem, że funkcja f jest różniczkowalna w x_0. I to jest **równanie stycznej do wykresu funkcji** f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Geometryczna interpretacja pochodnej może być wysłowiona następujaco: Pochodna funkcji w punkcie to współczynnik kierunkowy[5] prostej stycznej do wykresu funkcji w rozważanym punkcie.

Pochodne jednostronne.

Rozważmy funkcję $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określoną wzorem $f(x)=|x|$. Usiłując wyznaczyć jej pochodną w punkcie 0 piszemy

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$$

i stwierdzamy, że granica ta nie istnieje, w związku z czym funkcja f nie jest różniczkowalna w zerze. Jednak w ostatniej granicy istnieją granice jednostronne. Te granice jednostronne nazwiemy pochodnymi jednostronnymi funkcji.

I tak pochodną lewostronną ogólnej funkcji f w punkcie x_0 nazwiemy granicę[6]

$$f'_-(x_0) = f'(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,,$$

a pochodną prawostronną granicę

$$f'_+(x_0) = f'(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,.$$

Według obecnie rozpowszechnionych oznaczeń pochodne jednostronne oznacza się przez $f'_-(x_0)$ oraz $f'_+(x_0)$, ale ja używam staroświeckich oznaczeń $f'(x_0^-)$ oraz $f'(x_0^+)$, które pomimo pewnych wad mają tę zaletę, że bez problemu możemy je zastosować do funkcji oznaczonych literką z dolnym indeksem.

Wracając do funkcji $f(x)=|x|$, mamy $f'(0^-)=-1$ oraz $f'(0^+)=1$.

Warunkiem koniecznym różniczkowalności funkcji f w punkcie x_0 jest istnienie i równość pochodnych jednostronnych w tym punkcie. Możemy więc użyć pochodnych jednostronnych do badania różniczkowalności funkcji sklejanej z dwóch lub więcej wzorów obowiązujących w kolejnych przedziałach, czego ilustracją jest zadanie na końcu tego wykładu.

[5]Czyli tangens kąta nachylenia stycznej. A kąt nachylenia stycznej to kąt, jaki styczna tworzy z dodatnią półosią OX.

[6]O ile ta granica lewostronna istnieje.

Ale pochodne jednostronne opisują też zachowanie funkcji określonej na przedziale domkniętym, na przykład funkcja zdefiniowana wzorem

$$f(x)=\sqrt{x^3}$$

jest określona na przedziale $[0,\infty)$, wobec czego nie można mówić o pochodnej w punkcie 0, bo nie jest to punkt wewnętrzny dziedziny. Jednak świetną namiastką pochodnej jest pochodna prawostronna:

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^3}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0\,.$$

454. Wyznaczyć takie liczby a i b, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\{x\}^3+a\cdot\{x\}^2+b\cdot\{x\}$$

była różniczkowalna.

Rozwiązanie:

Ponieważ funkcja f jest okresowa z okresem 1, wystarczy zapewnić jej różniczkowalność na pojedynczym okresie.

Ponadto dla $x\in(0,1)$ mamy

$$f(x)=x^3+a\cdot x^2+b\cdot x\,,$$

skąd wynika, że f jest różniczkowalna na przedziale $(0,1)$, a wobec okresowości jest różniczkowalna we wszystkich punktach niecałkowitych.

Pozostaje zapewnić różniczkowalność w punktach całkowitych, czyli[7] w jakimkolwiek punkcie całkowitym. Warunkiem koniecznym różniczkowalności jest ciągłość, która dla punktu 1 sprowadza się do równości granic

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=a+b+1 \qquad \text{oraz} \qquad f(1)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=0\,.$$

Stąd warunek $\mathbf{a+b+1=0}$ jest warunkiem koniecznym i dostatecznym ciągłości funkcji f.

Jeżeli już f jest ciągła, to

$$f(x)=x^3+a\cdot x^2+b\cdot x$$

dla każdego $x\in[0,1]$. To oznacza, że

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

dla $x\in(0,1)$, ale powyższy wzór daje także pochodne jednostronne na końcach przedziału $[0,1]$:

$$f'(0^+)=b, \qquad f'(1^-)=3+2a+b\,.$$

Z uwagi na okresowość funkcji f, dla każdej liczby całkowitej n mamy

$$f'(n^+)=b, \qquad f'(n^-)=3+2a+b\,.$$

Wobec tego różniczkowalność funkcji f sprowadza się do równości powyższych pochodnych jednostronnych:

$$b=3+2a+b\,, \qquad \text{czyli} \qquad \mathbf{3+2a=0}\,.$$

Rozwiązanie otrzymanego układu równań prowadzi do $a=-3/2$ i $b=1/2$.

[7] Ze względu na okresowość.