Pochodna funkcji.

Wyobraźmy sobie przedmiot, który został upuszczony z dużej wysokości w chwili $t=0$. Przypuśćmy, że mamy możliwość precyzyjnej obserwacji jego położenia w zależności od czasu i stwierdziliśmy[1], że po t sekundach ruchu ciało przebyło drogę[2] $5t^2$ metrów. Poza obserwacją położenia nie mamy jednak środków do bezpośredniego mierzenia innych wielkości fizycznych związanych z tym ruchem, np. prędkości. A właśnie prędkość chwilowa ciała po upływie 2 sekund od rozpoczęcia ruchu by nas interesowała.

Odgrzebując w pamięci najbardziej elementane fizyczne wzorki[3] przypominamy sobie wzór na średnią prędkość. Otóż jeśli jakiś obiekt (spadające ciało lub samochód na szosie) przebyło w określonym czasie określoną drogę, to średnia prędkość w czasie tego ruchu jest ilorazem drogi przez czas. Jeśli bowiem samochód przejechał 240 kilometrów w ciągu 3 godzin, to nie trzeba być ekspertem z fizyki, aby wiedzieć, że oznacza to średnią prędkość 80 km/h.

Wracając do spadającego przedmiotu, oznaczmy przez $r(t)=5t^2$ drogę przebytą przez ciało do chwili t. I zapytajmy o średnią prędkość w drugiej sekundzie lotu, czyli w ciągu sekundy poprzedzającej interesujący nas moment $t=2$. Zgodnie ze wzorem na prędkość średnią otrzymujemy

$$\frac{r(2)-r(1)}{2-1}=\frac{20-5}{1}=15\,,$$

co oznacza, że szukana prędkość średnia[4] wynosi 15 m/s.

Podobnie rozumując, możemy obliczyć średnią prędkość ciała w sekundzie następującej po chwili $t=2$:

$$\frac{r(3)-r(2)}{3-2}=\frac{45-20}{1}=25\,.$$

To sugeruje, że w chwili $t=2$ ciało spdało z prędkością pomiędzy 15 i 25 metrów na sekundę. Jest to mało dokładne, gdyż rozważane przez nas przedziały czasowe są zbyt duże jak na dynamicznie zmieniającą się prędkość.

To może rozważmy jedną dziesiątą sekundy po interesującej nas chwili i wyliczmy średnią prędkość:

$$\frac{r(2,1)-r(2)}{2,1-2}=\frac{22,05-20}{0,1}=20,5\,.$$

A jedna setna sekundy przed $t=2$ daje średnią prędkość równą:

$$\frac{r(2)-r(1,99)}{2-1,99}=\frac{20-19,8005}{0,01}=19,95\,.$$

---

[1] Wszelką wiedzę fizyczną dotyczącą np. ruchu jednostajnie przyspieszonego, odłóżmy na razie na bok.

[2] Biegli w fizyce dostrzegą od razu liczbę 5 jako połowę przyspieszenia ziemskiego (w metrach na sekundę do kwadratu) zaokrąglonego do liczby całkowitej.

[3] Nawet znajomość fizyki nie jest tu zbytnio potrzebna, bo w zupełności wystarczy życiowy rozsądek i rozumienie wielkości występujących w codziennym życiu.

[4] Zwróćmy uwagę, że w fizyce wielkości fizyczne na ogół mają jednostki fizyczne, podczas gdy w matematyce posługujemy się liczbami niemianowanymi zostawiając ewentualne jednostki w domyśle.

I jeszcze milisekudna po:

$$\frac{r(2,001)-r(2)}{2,001-2}=\frac{20,020005-20}{0,001}=20,005\,.$$

Trudno się oprzeć wrażeniu, że otrzymywane przez nas wielkości zbliżają się do 20 m/s. Widzimy bowiem, że średnia prędkość ciała w krótkim przedziale czasowym w pobliżu $t=2$ jest bliska 20. Czujemy, że im krótszy przedział czasowy, tym lepiej średnia prędkość oddaje prędkość chwilową. Przejdźmy więc do granicy i uznajmy graniczną prędkość za prędkość chwilową. A dokładniej, wyliczmy prędkość średnią w czasie[5] od $t=2$ do $t=2+\Delta t$ i przejdźmy z Δt do zera[6].

W konsekwencji za prędkość chwilową w chwili $t=2$ uznalibyśmy liczbę

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r(2+\Delta t)-r(2)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{20+20\Delta t+5\Delta t^2-20}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}20+5\Delta t=20\,,$$

czyli tak jak podejrzewaliśmy.

W opisanej wyżej sytuacji fizycznej, mieliśmy podaną funkcję położenia ciała w zależności od czasu i zainteresowaliśmy się chwilową prędkością zmiany wartości tej funkcji na jednostkę czasu.

Ujmując to w ramy matematyczne: niech funkcja $f:D_f\to\mathbb{R}$ będzie określona na przedziale otwartym lub sumie[7] przedziałów otwartych[8]. Dla punktu $x_0\in D_f$ i liczby h na tyle bliskiej zeru, aby przedział pomiędzy[9] x_0 i x_0+h był zawarty w D_f, rozważamy średni przyrost wartości funkcji na jednostkę argumentu[10] na tym przedziale:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,.$$

W przypadku, gdy f jest funkcją opisującą położenie ciała w zależności od czasu, powyższa wielokość odpowiada średniej prędkości spadającego, czy inaczej poruszającego się ciała. To, co odpowiada prędkości chwilowej, to granica powyższego ilorazu różnicowego przy h dążącym do zera. Oczywiście w świecie fizycznym taka prędkość chwilowa istnieje, bo każde ciało ma jakąś prędkość[11], natomiast w matematyce rozważamy funkcje, które nie odpowiadają położeniu żadnego ciała w realnym świecie. Trudno bowiem zrealizować funkcję w stylu funkcji Dirichleta i rozważać ciało, które w chwilach wymiernych jest we Wrocławiu, a w niewymiernych w Warszawie.

[5]Zauważmy, że Δt może być ujemne – wtedy oznacza to rozważanie krótkiego przedziału czasowego **przed** interesującym nas momentem.

[6]W fizyce przejście graniczne często realizuje się mówiąc, że Δt staje się nieskończenie małym przyrostem czasowym.

[7]Być może nieskończenie wielu.

[8]W pewnych sytuacjach dopuścimy przedziały domknięte, ale zrywamy tu z rozważaniem funkcji określonych na dowolnych podzbiorach zbioru liczb rzeczywistych.

[9]Jestem skazany na słowny opis przedziału, jeśli nie chcę deklarować, czy h jest ujemne czy dodatnie.

[10]Podane wyrażenie jest zwane ilorazem różnicowym.

[11]Mówimy tu o fizyce klasycznej, a nie kwantowej, więc proszę mi tu nie wyjeżdżać z zasadą nieoznaczoności Heisenberga.

Tak więc chwilowa prędkość wzrostu wartości funkcji f na jednostkę argumentu w punkcie x_0 jest równa

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

przy czym nie mamy żadnej gwarancji, że powyższa granica w ogóle istnieje.

* * * * * * * * * * * * * *
* * * * *

Po tym wstępie dającym motywację wprowadzanego pojęcia przejdźmy do systematycznego uporządkowania definicji i własności.

Niech funkcja $f : D_f \to \mathbb{R}$ będzie określona na przedziale otwartym lub sumie przedziałów otwartych i niech x_0 będzie punktem jej dziedziny.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

to funkcję f nazwiemy różniczkowalną w punkcie x_0, a wyżej określoną **liczbę** nazwiemy pochodną funkcji f w punkcie x_0 i oznaczymy przez[12] $f'(x_0)$. Jeśli zaś ta granica nie istnieje, to powiemy, że funkcja f jest nieróżniczkowalna[13] w punkcie x_0.

Funkcją pochodną[14] funkcji f nazywamy funkcję f' określoną wzorem

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

której dziedzinę stanowi zbiór tych $x\in D_f$, dla których powyższa granica istnieje. Formalnie rzecz biorąc, dla każdej funkcji f mogę stworzyć funkcję f', najwyżej będzie miała pustą dziedzinę. Jednak na co dzień nie rozważamy takich sytuacji patologicznych i zapisu f' używamy wtedy, gdy f jest różniczkowalna w każdym, bądź prawie każdym punkcie swojej dziedziny. Jeśli powiemy o funkcji, że jest różniczkowalna, to znaczy, że jest różniczkowalna w każdym punkcie swojej dziedziny. W przeciwnym razie powiemy, że jest nieróżniczkowalna, ewentualnie doprecyzujemy: jest różniczkowalna w całej dziedzinie za wyjątkiem punktów takich a takich.

Definicję pochodnej można przepisać w postaci równoważnej[15]:

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

[12] To oznaczenie wygląda w tym momencie dość dziwnie, bo sugeruje, że mamy jakąś funkcję f' i bierzemy jej wartość w punkcie x_0. Za chwilę zobaczymy jednak, że z pochodnych w poszczególnych punktach dziedziny poskładamy sobie funkcję, którą oznaczymy właśnie przez f'.

[13] Inne określenia: funkcja f nie ma pochodnej w x_0, pochodna funkcji f w x_0 nie istnieje.

[14] Lub krócej: pochodną.

[15] Faktycznie jest to tylko zmiana oznaczeń.

W prostych przypadkach pochodną funkcji możemy wyliczyć korzystając bezpośrednio z definicji:

450. Korzystając z definicji pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=x^2$.

Rozwiązanie:
Stosując definicję pochodnej otrzymujemy:

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{y^2-x^2}{y-x}=\lim_{y\to x}y+x=2x\,.$$

451. Korzystając z definicji pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=1/x$ na zbiorze $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Rozwiązanie:
Stosując definicję pochodnej otrzymujemy:

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{\frac{x-y}{xy}}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{-1}{xy}=-\frac{1}{x^2}\,.$$

452. Korzystając z definicji pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt{x}$ na przedziale $(0,\infty)$.

Rozwiązanie:
Stosując definicję pochodnej i korzystając ze wzoru na róznicę kwadratów otrzymujemy:

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

* * * * * * * * * * * * * *
* * * * *

To, co było do tego momentu,
wystarczy do rozwiązywania zadań z listy 18.

* * * * * * * * * * * * * *
* * * * *

Wyjaśnienia wymaga stosowanie odpowiednich zapisów dla oznaczenia pochodnej. Otóż *prim* możemy dopisać jedynie do symbolu oznaczającego funkcję. Natomiast jeśli sama funkcja nie została przez nas oznaczona, a dysponujemy jedynie wzorem ją definiującym, to nie powinniśmy używać prima dla oznaczenia pochodnej. Starajmy się więc unikać zapisu[16] w stylu

$$\left(x^2\right)'=2x\,,$$

chociaż trzeba uczciwie przyznać, że taki zapis rzadko prowadzi do nieporozumień.

[16]Od biedy zapisu tego można probować bronić twierdząc, że $\left(x^2:x\in\mathbb{R}\right)$ oznacza przedmiotową funkcję, $\left(x^2:x\in\mathbb{R}\right)'$ oznacza pochodną tejże funkcji, natomiast $\left(x^2\right)'$ jest skróconą wersją napisu $\left(x^2:x\in\mathbb{R}\right)'$.

Dla oznaczenia pochodnej funkcji zdefiniowanej wzorkiem zależnym od x możemy użyć operatora[17] $\frac{d}{dx}$. I tak możemy napisać

$$\frac{d}{dx}x^2=2x\,.$$

Można też napisać

$$\frac{d\,x^2}{dx}=2x\,.$$

To samo można wyrazić używając jako zmiennej jakiejkolwiek[18] innej literki, na przykład:

$$\frac{d}{dt}t^2=2t\,.$$

Oczywiście w praktyce nie obliczamy pochodnych funkcji z definicji, są wzory, które na to pozwalają. Wzory te składają się z tabelki pochodnych podstawowych funkcji oraz przepisów, jak obliczać pochodną funkcji utworzonej z nich przez określone operacje.

Oto wzory na pochodne podstawowych funkcji[19]:

$$\frac{d}{dx}C=0 \qquad C\in\mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}x=1$$

$$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1} \qquad n\in\mathbb{N}$$

$$\frac{d}{dx}x^a=ax^{a-1} \qquad a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\frac{d}{dx}e^x=e^x$$

$$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{arctg}x=\frac{1}{x^2+1}$$

[17]Oczywiście napis ten traktujemy jako całość, niech nikomu nie przyjdzie do głowy upraszczanie literki d w liczniku i mianowniku.

[18]No dobrze, nie zupełnie dowolnej, bo na przykład nie można w tym kontekście oznaczyć zmiennej literką d.

[19]Niektóre wzory są niepotrzebne, bo są szczególnymi przypadkami innych wzorów, ale warto te szczególne przypadki wyraźnie sformułować.

A tak wyglądają wzorki na pochodną[20] funkcji uzyskanej z innych funkcji:

$$(f+g)'=f'+g'$$
$$(f-g)'=f'-g'$$
$$(fg)'=f'g+fg'$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$
$$\frac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Oprócz tego warto spojrzeć na pewne szczególne przypadki zastosowania powyższych wzorów:

$$\frac{d}{dx}f(x+a)=f'(x+a) \qquad a\in\mathbb{R}$$
$$\frac{d}{dx}f(ax)=a\cdot f'(ax) \qquad a\in\mathbb{R}$$
$$\frac{d}{dx}a\cdot f(x)=a\cdot f'(x) \qquad a\in\mathbb{R}$$
$$\frac{d}{dx}e^{f(x)}=e^{f(x)}\cdot f'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\ln f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$
$$(fgh)'=f'gh+fg'h+fgh'$$
$$\frac{d}{dx}f(g(h(x)))=f'(g(h(x)))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x)$$

A na koniec dzisiejszego wykładu przykład nieoczywistego sprowadzenia pochodnej potęgi do podanych wyżej wzorów.

453. Wyprowadzić wzór na pochodną funkcji $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x)=x^x\,.$$

Rozwiązanie:

Sztuczka polega na wyrażeniu potęgi przy pomocy mnożenia i funkcji wykładniczej oraz logarytmicznej:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}x^x=\frac{d}{dx}e^{\ln x^x}=\frac{d}{dx}e^{x\cdot\ln x}=e^{x\cdot\ln x}\cdot\frac{d}{dx}x\cdot\ln x=x^x\cdot\left(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=x^x\cdot(1+\ln x)\,.$$

[20] Jak zwykle rozumiemy je tak: Jeśli funkcje f i g są różniczkowalne, to podana funkcja jest różniczkowalna i jej pochodna wyraża się podanym wzorem.