Ciągłość i granica funkcji – uzupełnienie.

Twierdzenie o trzech funkcjach.

Twierdzenie o trzech funkcjach jest przeniesieniem twierdzenia o trzech ciągach z granic ciągów na granice funkcji. Można je udowodnić odwołując się do definicji ciągowej (Heinego) granicy funkcji, ale ja dowód pominę, ograniczając się do sformułowania. Wcześniej jednak idea. W twierdzeniu o trzech ciągach chodzi o to, że jeśli potrafię oszacować wyrazy ciągu od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do tej samej granicy, to rozważany ciąg jest zbieżny do tejże wspólnej granicy oszacowań. Dla funkcji idea wykorzystania oszacowań jest analogiczna.

TWIERDZENIE O TRZECH FUNKCJACH: Niech $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ będzie punktem skupienia dziedziny D_f funkcji f. Jeżeli funkcje f_0 i f_1 są określone w D_f w pobliżu[1] punktu x_0, a ponadto zachodzą tam nierówności

$$f_0(x) \leqslant f(x) \leqslant f_1(x)\,,$$

to z istnienia[2] i równości granic

$$\lim_{x\to x_0} f_0(x) = \lim_{x\to x_0} f_1(x)$$

wynika, że także granica $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ istnieje i jest im równa.

Najprostszym modelowym przykładem zastosowania twierdzenia o trzech funkcjach jest problem obliczenia granicy

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}\,.$$

Ponieważ sinus przyjmuje wartości z przedziału $[-1, 1]$, szacujemy wyrażenie pod znakiem granicy od góry i od dołu:

$$-x \;\leqslant\; x\sin\frac{1}{x} \;\leqslant\; x$$

i zauważamy, że

$$\lim_{x\to 0} -x = \lim_{x\to 0} x = 0\,.$$

Stąd na mocy twierdzenia o trzech funkcjach

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0\,.$$

Wygląda dobrze? To **spróbuj znaleźć błąd,** zanim zajrzysz na kolejną stronę.

[1] A dokładniej są określone na pewnym zbiorze postaci:
$D_f \cap (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$, gdzie $\delta > 0$ – w przypadku $x_0 \in \mathbb{R}$,
$D_f \cap (N, +\infty)$, gdzie $N \in \mathbb{R}$ – w przypadku $x_0 = +\infty$,
$D_f \cap (-\infty, N)$, gdzie $N \in \mathbb{R}$ – w przypadku $x_0 = -\infty$.

[2] W zasadzie o twierdzeniu o trzech funkcjach mówimy, gdy granice te są skończone. Ale dla nieskończonych granic niewłaściwych tak sformułowane twierdzenie też jest prawdzie, tyle że lepiej mówić o twierdzeniu o dwóch funkcjach. Jeśli bowiem $f_0(x) \leqslant f(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0} f_0(x) = +\infty$, to także $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ bez konieczności szacowania f od góry.

No tak, x-owi tak dodatnio z twarzy patrzy, ale w rzeczywistości podane oszacowania są fałszywe dla $x<0$. Powinno być:

$$-|x| \leqslant x\sin\frac{1}{x} \leqslant |x|\,.$$

Kolejny przykład to granica:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^n .$$

Aż korci, aby napisać

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n/\sqrt{2}}\right)^{n/\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}}\,.$$

Jeśli jednak definiujemy liczbę e jako granicę ciągu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n ,$$

czyli jako granicę $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$, gdzie $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, to nie mamy prawa twierdzić, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/\sqrt{2}}\right)^{n/\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right) = e\,,$$

gdyż to wymagałoby wiedzy, że

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,.$$

Jednak intuicyjnie wydaje się, że wartość wyrażenia $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ zależy przede wszystkim od rozmiaru x, a nie od tego, czy x jest całkowite, czy wymierne, czy może niewymierne.

Zbieżność ciągu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

możemy rozszerzyć na granicę funkcji

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

korzystając z oszacowań[3]:

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\cdot\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1} = \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqslant$$

$$\leqslant \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\cdot\left(1+\frac{1}{[x]}\right)$$

i zauważając, że oszacowania dolne i górne dążą do e przy $x\to+\infty$, gdyż $[x]$ przyjmuje tylko wartości naturalne.

[3] Dla $x\geqslant 1$.

Asymptoty.

Asymptota funkcji[4] to prosta, której odległość od wykresu funkcji dąży do zera, gdy poruszamy się po tej asymptocie do nieskończoności (w jedną bądź drugą stronę). Asymptoty są przydatne przy szkicowaniu wykresu funkcji.

Wyznaczanie asymptot odbywa się następująco:

• Prosta o równaniu $x=x_0$ jest **asymptotą pionową** funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi co najmniej jeden z warunków:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty \qquad \text{asymptota pionowa lewostronna}$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty \qquad \text{asymptota pionowa lewostronna}$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty \qquad \text{asymptota pionowa prawostronna}$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty \qquad \text{asymptota pionowa prawostronna}$$

Asymptotę pionową nazywamy obustronną, jeśli jest jednocześnie lewo- i prawostronna.

• **Asymptotą ukośną** funkcji f w $+\infty$ (inaczej: prawostronną) nazywamy prostą o równaniu $y=ax+b$, gdzie

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)-ax$$

pod warunkiem, że **obydwie** powyższe granice istnieją. A dokładniej, nazwy asymptota ukośna używamy w przypadku $a\neq 0$, natomiast w przypadku $a=0$ mamy

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$$

i wówczas prostą o równaniu $y=b$ nazywamy **asymptotą poziomą.**

• **Asymptotą ukośną** funkcji f w $-\infty$ (inaczej: lewostronną) wyznaczamy analogicznie, z tym że granice liczymy w $-\infty$.

447. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}\,.$$

Rozwiązanie:

Funkcja f jest określona i ciągła na zbiorze $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, w związku z czym jedynymi kandydatami na asymptoty pionowe są proste o równaniach $x=-1$ oraz $x=1$.

Sprawdzamy:

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2+x+1}{x+1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2+x+1}{x+1}=+\infty$$

[4] Można też mówić: asymptota wykresu funkcji, asymptota krzywej będącej wykresem funkcji.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{3}{2}$$

Wobec tego prosta o równaniu $x=-1$ jest asymptotą pionową, a prosta o równaniu $x=1$ nie jest.

Wyznaczamy asymptoty ukośne/poziome[5]:

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-1}{x^3-x}=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-1}{x^2-1}-x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-1-x^3+x}{x^2-1}=0$$

Zatem asymptotą ukośną (obustronną) jest prosta o równaniu $y=x$.

448. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}\,.$$

Pytanie dodatkowe[6]: Jak nazywa się krzywa będąca wykresem funkcji f ?

Rozwiązanie:

Ponieważ funkcja f jest ciągła na całej prostej rzeczywistej, nie ma mowy o asymptotach pionowych.

Szukamy asymptoty ukośnej w $+\infty$:

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)-ax=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

Zatem funkcja posiada w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu[7] $y=x$.

Szukamy asymptoty ukośnej w $-\infty$:

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)-ax=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

Zatem prosta o równaniu $y=x$ jest również asymptotą ukośną w $-\infty$.

Zanim zajrzysz na kolejną stronę, naszkicuj przebieg funkcji f uwzględniając następujące dwa fakty:

- Funkcja f przyjmuje tylko wartości dodatnie.
- Prosta o równaniu $y=x$ jest asymptotą ukośną funkcji f w $-\infty$.

---

[5]Można próbować jednym rachunkiem wyznaczyć asymptoty w $+\infty$ i $-\infty$. Okazuje się, że dla funkcji wymiernych, jeśli asymptota ukośna/pozioma istnieje, to jest obustronna.

[6]Odpowiedź na następnej stronie.

[7]Nie chcę niepotrzebnie komplikować przedstawianych przykładów, stąd po raz kolejny asymptotą jest najprostsza ukośna prosta.

Nie udało się naszkicować wykresu spełniającego podane dwie przesłanki? Ot przykrość. Co poszło nie tak? Otóż przy wyznaczaniu asymptoty w $-\infty$ trzeba uwzględnić ujemność x-a, wobec czego rachunki przyjmą postać:

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=-1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0$$

Tak więc asymptotą w $-\infty$ jest prosta o równaniu $y=-x$. Nic dziwnego, skoro bowiem f jest funkcją parzystą, to jej wykres jest symetryczny względem osi OY, a w konsekwencji asymptota w $-\infty$ jest symetrycznym odbiciem asymptoty w $+\infty$.

A wykres funkcji f jest krzywą o równaniu

$$y=\sqrt{x^2+1}\,,$$

czyli

$$y^2=x^2+1, \quad y>0$$

lub inaczej[8]

$$y^2-x^2-1=0, \quad y>0\,,$$

$$(y-x)(y+x)=1, \quad y>0\,.$$

Jest to więc **hiperbola,** a dokładniej połowa[9] hiperboli.

Własność Darboux funkcji ciągłych.

DEFINICJA: Powiemy, że funkcja f określona na przedziale[10] I ma **własność Darboux,** jeżeli między każdymi dwoma wartościami przyjmuje wszystkie wartości pośrednie. Dokładniej:
Dla każdych $a,b\in I$, gdzie $a<b$, i każdego w pomiędzy[11] $f(a)$ i $f(b)$ istnieje takie $c\in(a,b)$, że $f(c)=w$.

TWIERDZENIE: Każda funkcja ciągła na przedziale ma własność Darboux.

449. Udowodnić, że równanie $x^x=5$ ma rozwiązanie rzeczywiste x.

Rozwiązanie:

Ponieważ funkcja $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=x^x$ jest ciągła, a ponadto

$$f(2)=4<5<27=f(3)\,,$$

funkcja ta przyjmuje wartość 5 w jakimś punkcie przedziału $(2,3)$. Argument, dla którego wartość 5 jest przyjmowana, jest właśnie rozwiązaniem podanego równania.

[8] Niech każdy sobie wybierze wersję, która mu najbardziej odpowiada.

[9] Zwana czasem gałęzią hiperboli.

[10] Może to być przedział otwarty lub domknięty, ograniczony lub nie. Ważne, aby dziedzina funkcji była spójna, czyli składała się z jednego kawałka.

[11] Trudno to zgrabnie zapisać nierównościami, bo nie wiemy, która liczba jest większa: $f(a)$ czy $f(b)$. Jeśli $f(a)<f(b)$, to wymagamy $f(a)<w<f(b)$, a jeśli $f(a)>f(b)$, to żądamy $f(b)<w<f(a)$. Można też zapisać to w mniej czytelnej, ale zwartej postaci: $w=f(a)+t\cdot(f(b)-f(a))$, gdzie $t\in(0,1)$.

Koniecznie trzeba w tym miejscu przywołać przykład funkcji f_{12} z **wykładu 20**:

$$f_{12}(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x=0 \end{cases} \qquad D_{f_{12}}=\mathbb{R}$$

Jest to bowiem funkcja nieciągła, która jednak ma własność Darboux. To rozwiewa przypuszczenia, że własność Darboux jest równoważna ciągłości.

Przykład ten może jednak nasunąć inne błędne przypuszczenia. Wykres funkcji f_{12} jest bowiem czymś, co kojarzymy z linią, a nieciągłość bierze się z zagęszczenia tej linii koło zera. Nieprzerwaną linię możemy zaś kojarzyć z własnością Darboux – bo właśnie takie nieprzerwane linie nie pozwalają funkcji przeskoczyć i pominąć niektórych wartości.

Musicie mi zaufać, bo tego nie skonstruuję, ale istnieją funkcje, które w każdym przedziale[12] przyjmują każdą wartość rzeczywistą nieskończenie wiele razy. Wykres takiej funkcji jest gęsty na całej płaszczyźnie. Taka funkcja ma własność Darboux, ale można obrazowo powiedzieć, że jest całkowitym zaprzeczeniem ciągłości.

Twierdzenie Weierstrassa.

TWIERDZENIE: Każda funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest ograniczona i osiąga swoje kresy.

Jest to bardzo ważne twierdzenie, bo mówi nam, że funkcja ciągła na przedziale domkniętym osiąga wartości największą i najmniejszą. Będziemy z tego korzystać szukając najmniejszej i największej wartości funkcji przy użyciu pochodnych. Gdyby nie było wiadomo, że takie wartości istnieją, metoda, którą niedługo poznamy, nie byłaby poprawna.

Uwaga: To, że funkcja jest określona akurat na przedziale domkniętym, nie jest absolutnie konieczne. Dokładniej: jest zupełnie bez znaczenia, że dziedzina funkcji jest spójna (czyli w jednym kawałku). Natomiast kluczowe są dwie własności dziedziny:
- że jest zbiorem ograniczonym,
- że jest zbiorem domkniętym[13].

Obie te własności (w przypadku podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych) łącznie stanowią własność zwaną **zwartością.**

Obejrzyj w internecie[14] wykład doc. Górniaka z PWr:

Odcinek **34:** Wybrane własności f. ciągłych (tw. Weierstrassa, tw.Darboux) na przedziałach domkniętych.

Nie przejmuj się drobnymi różnicami terminologicznymi (np. dla funkcji ciągłej na przedziale domkniętym doc. Górniak mówi o jednostronnej ciągłości na końcach, a ja dopuszczam nazywanie tego ciągłością na końcach).

---
[12] Choćby w króciutkim przedzialiku.

[13] Zbiór Z jest domknięty, gdy dla każdego ciągu zbieżnego o wyrazach ze zbioru Z, granica tego ciągu też należy do zbioru Z.

[14] Link do wykładów doc. Górniaka: `https://oze.pwr.edu.pl/kursy/analiza/analiza.html`

Jednostajna ciągłość.

Przypomnijmy, że zgodnie z definicją Cauchy'ego funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{x_0\in D_f}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{\substack{x\in D_f\\ |x-x_0|<\delta}}{\forall}\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

Ponieważ stojące obok siebie kwantyfikatory tego samego rodzaju można dowolnie zamieniać miejscami, powyższy warunek daje sie przepisać w równoważnej postaci:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{x_0\in D_f}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{\substack{x\in D_f\\ |x-x_0|<\delta}}{\forall}\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

Układ początkowych trzech kwantyfikatorów mówi: do ε i x_0 mamy dobrać takie δ, aby dalej było to, co trzeba. Jednak dla niektórych funkcji[15] dobór delty do epsilona nie wymaga znajomości x_0 (jest jednostajny w całej dziedzinie). Natomiast dla niektórych funkcji wybór delty zależy od x_0. Jeśli do doboru delty znajomość x_0 nie jest konieczna, to możemy ostatni warunek przepisać jako:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x_0\in D_f}{\forall}\ \underset{\substack{x\in D_f\\ |x-x_0|<\delta}}{\forall}\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

lub krócej:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{\substack{x_0,x\in D_f\\ |x-x_0|<\delta}}{\forall}\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

W tym momencie role x_0 i x są równouprawnione, co możemy lepiej podkreślić zmieniając literki oznaczające zmienne:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{\substack{x,y\in D_f\\ |x-y|<\delta}}{\forall}\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

Powyższy warunek jest definicją **jednostajnej ciągłości** funkcji f.

Jednostajna ciągłość jest własnością silniejszą od ciągłości.

[15]Np. wtedy, gdy prawdziwa jest nierówność postaci

$$|f(x)-f(y)|<C\cdot|x-y|,$$

z jaką mieliśmy do czynienia w wielu zadaniach.