Granica niewłaściwa funkcji i granica w nieskończoności.

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\frac{1}{x^2}+7\,.$$

Dziedziną tej funkcji jest $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Kiedy zbliżamy się z argumentem do zera, wartości funkcji nie zbliżają się do żadnej liczby rzeczywistej, ale ich zachowanie jest uporządkowane – dążą one do nieskończoności. Chciałoby się więc zapisać

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}+7\right)=+\infty$$

i nazwać tę granicę granicą niewłaściwą funkcji f w punkcie 0.

Podobnie możemy się zainteresować wartościami funkcji f dla x uciekających do nieskończoności. Jeśli x jest bardzo dużą liczbą dodatnią, to $f(x)\approx 7$. Chętnie zapisalibyśmy to jako

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x^2}+7\right)=7\,.$$

Biorąc pod uwagę, że zbliżania do nieskończoności nie mierzymy epsilonem czy deltą, ale skrajnie dużymi czy skrajnie małymi[1] liczbami, możemy zapisać odpowiednie definicje granic i granic niewłaściwych w punktach skończonych i nieskończonych. Trzeba tylko pamiętać, że jest sens pytać o granicę

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}\,,$$

ale pytanie o granicę

$$\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x}$$

nie ma sensu. Jeśli bowiem interesuje nas granica funkcji w $+\infty$, to przy $+\infty$ muszą się skupiać punkty dziedziny, co sprowadza się do tego, że dziedzina musi być nieograniczona z góry[2]. Analogicznie, o granicę w $-\infty$ możemy pytać tylko wtedy, gdzy dziedzina jest nieograniczona z dołu[3].

Aby odświeżyć sobie mechanizm rozbieżności do $\pm\infty$ w porównaniu ze zbieżnością do liczby skończonej, przywołajmy definicje granicy ciągu (w tym granic niewłaściwych):

$$\mathop{\forall}_{\varepsilon>0}\ \mathop{\exists}_{N}\ \mathop{\forall}_{n\geqslant N}\ |a_n-g|<\varepsilon \qquad\qquad \lim_{n\to\infty}a_n=g$$

$$\mathop{\forall}_{M\in\mathbb{R}}\ \mathop{\exists}_{N}\ \mathop{\forall}_{n\geqslant N}\ a_n>M \qquad\qquad \lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$$

$$\mathop{\forall}_{M\in\mathbb{R}}\ \mathop{\exists}_{N}\ \mathop{\forall}_{n\geqslant N}\ a_n<M \qquad\qquad \lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$$

[1]Bardzo ujemnymi.
[2]Równoważnie: Istnieje ciąg punktów dziedziny rozbieżny do $+\infty$.
[3]Równoważnie: Istnieje ciąg punktów dziedziny rozbieżny do $-\infty$.

To prowadzi nas do definicji granicy[4] funkcji składającej się z 9 przypadków[5]:

$$\forall_{M} \exists_{N} \forall_{\substack{x\in D_f \\ x<N}} f(x)<M \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

$$\forall_{M} \exists_{\delta>0} \forall_{\substack{x\in D_f\setminus\{x_0\} \\ |x-x_0|<\delta}} f(x)<M \qquad \lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$$

$$\forall_{M} \exists_{N} \forall_{\substack{x\in D_f \\ x>N}} f(x)<M \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N} \forall_{\substack{x\in D_f \\ x<N}} |f(x)-g|<\varepsilon \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=g$$

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{\substack{x\in D_f\setminus\{x_0\} \\ |x-x_0|<\delta}} |f(x)-g|<\varepsilon \qquad \lim_{x\to x_0} f(x)=g$$

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N} \forall_{\substack{x\in D_f \\ x>N}} |f(x)-g|<\varepsilon \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=g$$

$$\forall_{M} \exists_{N} \forall_{\substack{x\in D_f \\ x<N}} f(x)>M \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

$$\forall_{M} \exists_{\delta>0} \forall_{\substack{x\in D_f\setminus\{x_0\} \\ |x-x_0|<\delta}} f(x)>M \qquad \lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$$

$$\forall_{M} \exists_{N} \forall_{\substack{x\in D_f \\ x>N}} f(x)>M \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

[4] Plus oczywiście założenie, że graniczny argument jest punktem skupienia dziedziny.

[5] Bo mamy 3 przypadki na poziomie granicznego argumentu: skończony, $+\infty$, $-\infty$. I takież 3 przypadki na poziomie wartości granicy.

Okazuje się, że prostszą definicję uzyskamy formułując ją w stylu definicji ciągowej (Heinego), gdyż wówczas 3 przypadki dążenia do liczby skończonej lub $\pm\infty$ chowamy w jednolicie zapisywalną granicę ciągu (lub granicę niewłaściwą).

DEFINICJA GRANICY FUNKCJI W PUNKCIE[6]: Niech $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ będzie punktem skupienia dziedziny D_f funkcji f. Funkcja f ma w x_0 granicę równą $g \in [-\infty, +\infty]$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach należących do $D_f \setminus \{x_0\}$ i dążacego[7] do x_0 zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g\,.$$

Wówczas zapisujemy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g\,.$$

[6]Zauważ nawiasy kwadratowe, które mówią, że x_0 oraz g mogą być nieskończone.

[7]Zwróć uwagę, że słowo "dążyć" jest uniwersalne, bo obejmuje zarówno zbieżność jak i rozbieżność do $\pm\infty$.