# Granica funkcji.

Na początek przypomnijmy pięć funkcji z **wykładu 20:**

$$f_1(x)=\frac{x^2-1}{x-1} \qquad D_{f_1}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

$$f_2(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{dla} \quad x\neq 1 \\ 1 & \text{dla} \quad x=1 \end{cases} \qquad D_{f_2}=\mathbb{R}$$

$$f_3(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{dla} \quad x\neq 1 \\ 2 & \text{dla} \quad x=1 \end{cases} \qquad D_{f_3}=\mathbb{R}$$

$$f_5(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} -1 & \text{dla} \quad x<0 \\ 0 & \text{dla} \quad x=0 \\ 1 & \text{dla} \quad x>0 \end{cases} \qquad D_{f_5}=\mathbb{R}$$

$$f_9(x)=\begin{cases} 2 & \text{dla} \quad x=-4 \\ \sqrt{x} & \text{dla} \quad x\geqslant 0 \end{cases} \qquad D_{f_9}=\{-4\}\cup[0,\infty)$$

Funkcje $f_1$, $f_2$ i $f_3$ to prawie ta sama funkcja. Funkcja $f_3$ to po prostu funkcja zdefiniowana wzorem $f_3(x)=x+1$ określona na całej prostej rzeczywistej, tylko podana w nieco dziwny sposób. Funkcja $f_1$ to funkcja określona takim samym wzorem $f_1(x)=x+1$, tylko z liczbą 1 usuniętą z dziedziny. Natomiast funkcja $f_2$ jest również określona wzorem $f_2=x+1$, z tym że w punkcie 1 jej wartość jest sztucznie zmieniona z 2 na 1. Jeśli nie chcielibśmy za wszelką cenę sprawiać wrażenia, że to, co się dzieje w punkcie 1 jest spowodowane postacią wzoru definiującego te funkcje, to moglibyśmy zapisać prościej:

$$f_1(x)=x+1 \qquad D_{f_1}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

$$f_2(x)=\begin{cases} x+1 & \text{dla} \quad x\neq 1 \\ 1 & \text{dla} \quad x=1 \end{cases} \qquad D_{f_2}=\mathbb{R}$$

$$f_3(x)=x+1 \qquad D_{f_3}=\mathbb{R}$$

Funkcje te różnią się więc tylko tym, co robimy z punktem 1. Jeśli natomiast zignorujemy[1] sam punkt $x=1$, to możemy zauważyć, że blisko punktu 1 funkcje te przyjmują wartości bliskie 2. W przypadku funkcji $f_3$, dla której właśnie $f_3(1)=2$, takie stwierdzenie wyraża ciągłość tej funkcji w punkcie 1. Ciągłość funkcji mówi bowiem[2], że w pobliżu rozważanego punktu dziedziny wartości funkcji są bliskie wzorca, którym to wzorcem

[1] Czyli nie będzie nas interesować wartość w tym punkcie, ani to, czy w ogóle należy on do dziedziny.

[2] W typowej sytuacji. O różnych niuansach będzie trochę później.

jest właśnie wartość funkcji w rozważanym punkcie. Ale takiego naturalnego wzorca w postaci wartości funkcji w rozważanym punkcie nie będzie, jeśli punkt ten wypadnie z dziedziny lub funkcja przyjmie w nim wartość wziętą z sufitu.

Przypomnijmy definicję ciągłości funkcji w punkcie:

DEFINICJA: Funkcja $f$ jest **ciągła w punkcie** $x_0 \in D_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{\substack{x\in D_f \\ |x-x_0|<\delta}}{\forall} \ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon .$$

Baaaaardzo intuicyjnie możemy powiedzieć, że

$$x\approx x_0 \ \Rightarrow \ f(x)\approx f(x_0) .$$

Jeśli teraz zamiast wzorca w postaci $f(x_0)$ dopuścimy jakikolwiek inny wzorzec $g\in\mathbb{R}$ jako przybliżenia wartości funkcji $f$ w pobliżu $x_0$, możemy zapisać, że chodzi nam o

$$x\approx x_0 \ \Rightarrow \ f(x)\approx g ,$$

co po bezmyślnym zastąpieniu $f(x_0)$ przez $g$ da nam warunek:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{\substack{x\in D_f \\ |x-x_0|<\delta}}{\forall} \ |f(x)-g|<\varepsilon .$$

Ale to nie jest dobrze, bo w punkcie $x_0$ funkcja $f$ może przyjmować jakąś wartość z kosmosu, bardzo odległą od $g$, wobec czego nie będziemy mogli napisać, że $f(x_0)\approx g$. A przecież umówiliśmy się, że wartość w punkcie $x_0$ ignorujemy. Trzeba więc umieścić w rozważanym warunku wykluczenie z rozważań[3] ewentualnej wartości funkcji $f$ w punkcie $x_0$:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{\substack{x\in D_f\setminus\{x_0\} \\ |x-x_0|<\delta}}{\forall} \ |f(x)-g|<\varepsilon .$$

I to już jest prawie[4] to, o co nam chodzi.

Nie jest chyba dla nikogo tajemnicą, że zmierzam do zdefiniowania pojęcia granicy funkcji w punkcie. Sformułujmy więc taką oto pseudodefinicję:

PSEUDODEFINICJA: Funkcja $f$ ma w punkcie $x_0$ granicę równą $g$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{\substack{x\in D_f\setminus\{x_0\} \\ |x-x_0|<\delta}}{\forall} \ |f(x)-g|<\varepsilon .$$

Wówczas zapisujemy

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=g .$$

Powyższa pseudodefinicja wygląda bardzo sugestywnie, ale jest pewien niuans, który trzeba będzie wypełnić.

[3]Czyli wymuszenie $x\neq x_0$.

[4]Jak się za chwilę przekonamy, "prawie" robi sporą różnicę.

Przypomnijmy funkcję

$$f_9(x)=\begin{cases} 2 & \text{dla} \quad x=-4 \\ \sqrt{x} & \text{dla} \quad x\geqslant 0 \end{cases} \qquad\qquad D_{f_9}=\{-4\}\cup[0,\infty)$$

i zapytajmy o jej granicę w punkcie $-1$. W pseudodefinicji na poprzedniej stronie nie ma bowiem ani słowa o tym, w których punktach można sensownie pytać o granicę funkcji, a w których nie. Gdybyśmy pozostawili psuedodefinicję jak jest, to funkcja $f_9$ miałaby w punkcie $-1$ granicę równą $\sqrt{17}$. Ale też miałaby tam granicę równą $5\pi$. Bo zgodnie z pseudodefinicją każda liczba rzeczywista $g$ jest granicą funkcji $f_9$ w punkcie $-1$.

A to dlatego, że biorąc $\delta=1$, pod trzecim kwantyfikatorem mamy warunek

$$x\in D_{f_9}\setminus\{-1\} \ \wedge\ |x-(-1)|<1\,,$$

który nie jest spełniony przez żadną liczbę rzeczywistą $x$. A zatem całość jest prawdziwa niezależnie od tego, co po tym kwantyfikatorze jest napisane[5].

Ktoś powie: No tak, cały problem bierze się stąd, że punkt $-1$ nie należy do dziedziny funkcji $f_9$. Niestety nie tędy droga. Jakoś nam nie przeszkadzało, że punkt 1 nie należy do dziedziny funkcji $f_1$. A gdybyśmy zapytali o granicę funkcji $f_9$ w punkcie $-4$ **należącym do jej dziedziny,** natknęlibyśmy się na dokładnie ten sam problem, co w punkcie $-1$. Granica w punkcie $-4$ ma bowiem zależeć od wartości funkcji w pobliżu $-4$, ale w punktach **różnych od –4.** A takowych punktów nie ma.

Brakuje więc w pseudodefinicji sprecyzowania, w których punktach możemy pytać o granicę funkcji, a w których nie. Przy czym nie jest to tożsame z należeniem punktu do dziedziny funkcji, bo o granicę funkcji można sensownie pytać w punkcie spoza dziedziny, a czasem nie można pytać w odniesieniu do punktu należącego do dziedziny.

Kluczowe pojęcie to pojęcie punktu skupienia zbioru:

DEFINICJA: Punkt $z$ jest **punktem skupienia** zbioru $Z\subset\mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{x\in Z\setminus\{z\}}{\exists}\ |x-z|<\varepsilon\,.$$

Intuicyjnie: Dowolnie blisko punktu $z$ istnieją punkty ze zbioru $Z$ różne od $z$. Nie ma przy tym znaczenia, czy $z$ jest elementem zbioru $Z$ czy nie.

DEFINICJA RÓWNOWAŻNA: Punkt $z$ jest **punktem skupienia** zbioru $Z\subset\mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach należących do $Z\setminus\{z\}$ zbieżny do $z$. Symbolami: Istnieje ciąg zbieżny $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} x_n\in Z\setminus\{z\}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=z$.

Otóż pytanie o granicę funkcji ma sens tylko wtedy, gdy interesujący nas punkt jest punktem skupienia dziedziny funkcji. Porządna definicja granicy funkcji w punkcie powinna więc brzmieć następująco:

[5]Efekt jest taki jakbyśmy mieli kwantyfikator "dla każdego $x$ należącego do zbioru pustego". Cokolwiek jest napisane dalej, taki warunek jest prawdziwy – mówimy, że jest spełniony w próżni.

DEFINICJA[6] GRANICY FUNKCJI W PUNKCIE: Niech $x_0$ będzie punktem skupienia dziedziny $D_f$ funkcji $f$. Funkcja $f$ ma w punkcie $x_0$ granicę równą $g$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{\substack{x\in D_f\setminus\{x_0\}\\ |x-x_0|<\delta}}{\forall}\ |f(x)-g|<\varepsilon\,.$$

Wówczas zapisujemy

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=g\,.$$

Inna definicja granicy funkcji w punkcie to definicja ciągowa (Heinego), którą możemy otrzymać z przekształenia odpowiedniej definicji ciągłości funkcji w punkcie:

DEFINICJA CIĄGŁOŚCI: Funkcja $f$ jest **ciągła w punkcie** $x_0\in D_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach należących do $D_f$ i zbieżnego do $x_0$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)\,.$$

DEFINICJA GRANICY FUNKCJI W PUNKCIE: Niech $x_0$ będzie punktem skupienia dziedziny $D_f$ funkcji $f$. Funkcja $f$ ma w $x_0$ granicę równą $g$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach należących do $D_f\setminus\{x_0\}$ i zbieżnego do $x_0$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=g\,.$$

Wówczas zapisujemy

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=g\,.$$

Obie podane definicje granicy funkcji w punkcie są równoważne, ale dowodu tej równoważności przeprowadzać nie będę.

Przyjrzyjmy się teraz funkcji $f_5$:

$$f_5(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & \text{dla} \quad x<0\\ 0 & \text{dla} \quad x=0\\ 1 & \text{dla} \quad x>0\end{cases} \qquad D_{f_5}=\mathbb{R}$$

Funkcja ta w punkcie 0 nie ma granicy, bo w pobliskich punktach przyjmuje ona zarówno wartości $-1$ jak i 1. Jednak te dwie wartości przyjmowane są w sposób szczególnie uporządkowany: wartość $-1$ na lewo, a wartość 1 na prawo. To prowadzi do pojęcia granic jednostronnych. Chcielibyśmy bowiem napisać, że zbliżając się do zera z lewej strony funkcja przyjmuje wartości bliskie $-1$, a z prawej 1:

$$\lim_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}(x)=-1 \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}(x)=1\,.$$

Formalne definicje granic jednostronnych są następujące:

[6] Definicja ta jest nazywana definicją epsilonowo-deltową lub definicją Cauchy'ego.

Definicja[7] granicy lewostronnej funkcji w punkcie: Niech $D_f$ będzie dziedziną funkcji $f$ i załóżmy, że $x_0$ jest punktem skupienia zbioru[8] $D_f\cap(-\infty, x_0)$. Funkcja $f$ ma w punkcie $x_0$ granicę lewostronną równą $g$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{x\in D_f\cap(x_0-\delta, x_0)}{\forall} \ |f(x)-g|<\varepsilon\,.$$

Wówczas zapisujemy

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=g\,.$$

Definicja[9] granicy prawostronnej funkcji w punkcie: Niech $D_f$ będzie dziedziną funkcji $f$ i załóżmy, że $x_0$ jest punktem skupienia zbioru[10] $D_f\cap(x_0, +\infty)$. Funkcja $f$ ma w punkcie $x_0$ granicę prawostronną równą $g$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{x\in D_f\cap(x_0, x_0+\delta)}{\forall} \ |f(x)-g|<\varepsilon\,.$$

Wówczas zapisujemy

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=g\,.$$

Definicja[11] granicy lewostronnej funkcji w punkcie: Niech $D_f$ będzie dziedziną funkcji $f$ i załóżmy, że $x_0$ jest punktem skupienia zbioru[12] $D_f\cap(-\infty, x_0)$. Funkcja $f$ ma w punkcie $x_0$ granicę lewostronną równą $g$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach należących do $D_f\cap(-\infty, x_0)$ i zbieżnego do $x_0$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=g\,.$$

Wówczas zapisujemy

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=g\,.$$

Definicja[13] granicy prawostronnej funkcji w punkcie: Niech $D_f$ będzie dziedziną funkcji $f$ i załóżmy, że $x_0$ jest punktem skupienia zbioru[14] $D_f\cap(x_0, +\infty)$. Funkcja $f$ ma w punkcie $x_0$ granicę prawostronną równą $g$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach należących do $D_f\cap(x_0, +\infty)$ i zbieżnego do $x_0$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=g\,.$$

Wówczas zapisujemy

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=g\,.$$

[7] Epsilonowo-deltowa czyli Cauchy'ego.
[8] Czyli lewostronnym punktem skupienia $D_f$.
[9] Epsilonowo-deltowa czyli Cauchy'ego.
[10] Czyli prawostronnym punktem skupienia $D_f$.
[11] Ciągowa czyli Heinego.
[12] Czyli lewostronnym punktem skupienia $D_f$.
[13] Ciągowa czyli Heinego.
[14] Czyli prawostronnym punktem skupienia $D_f$.

Przyjęte definicje są (w detalach) konsekwencją założenia, że dopuszczamy dowolne podzbiory zbioru liczb rzeczywistych jako dziedziny funkcji. Jeśli jakiś autor podręcznika stawia dziedzinom funkcji istotne ograniczenia[15], to niektóre oznaczenia i wnioski mogą (w detalach) wyglądać nieco inaczej niż ja tu prezentuję. W szczególności niektóre ładnie brzmiące sformułowania mogą wymagać komentarza lub doprecyzowania. Rozwiejmy sobie (na przykładach) kilka potencjalnych wątpliwości.

**Czy warunkiem koniecznym istnienia granicy funkcji w jakimś punkcie jest istnienie i równość granic jednostronnych w tym punkcie?**

Zgodnie z przyjętymi przez nas definicjami: **NIE.**

Jeżeli rozważany punkt jest obustronnym[16] punktem skupienia dziedziny, to **TAK.** Ale jeśli mamy jednostronny punkt skupienia, to jedna granica jednostronna jest tożsama z granicą, a o drugiej granicy jednostronnej nie ma sensu mówić. Na przykład funkcja $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt{x}$ ma w zerze granicę prawostronną równą 0 i jest to też granica funkcji, podczas gdy o granicy lewostronnej nie ma sensu mówić, bo 0 nie jest lewostronnym punktem skupienia dziedziny. Mamy więc:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0\,.$$

**Czy granica sumy jest sumą granic?**

Innymi słowy, czy z warunków[17]

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x)=g_1 \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{x\to x_0} f_2(x)=g_2$$

wynika

$$\lim_{x\to x_0}\left(f_1(x)+f_2(x)\right)=g_1+g_2\ ?$$

**Niezupełnie.** Z tego, że funkcje $f_1$ i $f_2$ mają granice w $x_0$ nie wynika, że ich suma $f_1+f_2$ też ma granicę w $x_0$. Może się bowiem zdarzyć, że $x_0$ jest punktem skupienia $D_{f_1}$ oraz jest punktem skupienia $D_{f_2}$, ale nie jest punktem skupienia $D_{f_1}\cap D_{f_2}$. Na przykład:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0 \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{x\to 0}\sqrt{-x}=0\,,$$

ale pytanie o granicę

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x}+\sqrt{-x}\right)$$

nie ma sensu, bo funkcja pod znakiem granicy ma dziedzinę $\{0\}$.

Jeśli jednak $x_0$ jest punktem skupienia $D_{f_1+f_2}=D_{f_1}\cap D_{f_2}$, czyli jest sens pytać o granicę $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f_1(x)+f_2(x)\right)$, to granica ta istnieje i jest równa $g_1+g_2$.

Te same uwagi dotyczą różnicy, iloczynu i ilorazu granic.

---

[15]Na przykład, że muszą być przedziałami lub sumami przedziałów.

[16]Czyli jednocześnie lewostronnym i prawostronnym.

[17]Tutaj $f_1$ i $f_2$ są dowolnymi funkcjami – zapomnijmy, że na początku tego wykładu oznaczały one konkretne funkcje.

**Czy ciągłość funkcji w jakimś punkcie jest równoważna temu, że w tym punkcie istnieje granica i jest ona równa wartości funkcji w rozważanym punkcie?**

Innymi słowy, czy $f$ jest ciągła w $x_0 \in D_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \ ?$$

**NIE.** Na przykład rozważana wcześniej funkcja $f_9$ jest ciągła w punkcie $-4$, ale nie ma sensu mówić tam o granicy, gdyż jest to punkt izolowany[18] dziedziny.

Faktycznie jest tak:
Funkcja $f$ jest ciągła w $x_0 \in D_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
punkt $x_0$ jest punktem izolowanym $D_f$
**lub**
punkt $x_0$ jest punktem skupienia $D_f$ i przy tym

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \ .$$

W praktyce rzadko się zdarza, aby funkcja miała dziedzinę z punktami izolowanymi, więc jednym ze sposobów badania ciągłości funkcji jest porównanie wartości funkcji z granicą lub z granicami jednostronnymi.

**Na co trzeba uważać przy obliczaniu granicy złożenia funkcji?**

Intuicja podpowiada, że jeżeli

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{y\to y_0} g(y) = z_0 \,,$$

to[19]

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = z_0 \,.$$

No bo pomyślmy. Jeśli $x \to x_0$, to $f(x) \to y_0$. A skoro $f(x) \to y_0$, to $g(f(x)) \to z_0$. Chyba w porządku?

Otóż nie do końca. Problem pojawi się, gdy $f$ będzie w pobliżu $x_0$ przyjmować wartość $y_0$. Wtedy do argumentu funkcji $g$ dostanie się zabronione $y_0$ jako $f(x)$ dla $x \neq x_0$.

Przykład:

$$f(x) = 7 \qquad\qquad D_f = \mathbb{R}$$

$$g(y) = \begin{cases} 2 & \text{dla} \quad y \neq 7 \\ 3 & \text{dla} \quad y = 7 \end{cases} \qquad\qquad D_g = \mathbb{R}$$

Wtedy

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 7 \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{y\to 7} g(y) = 2 \,,$$

ale

$$\lim_{x\to 0} g(f(x)) = 3 \neq 2 \,.$$

[18] Punkt izolowany zbioru to punkt należący do zbioru, ale niebędący jego punktem skupienia.

[19] Przy założeniu, że dziedziny nie robią nam takiego psikusa jak przy granicy sumy. Ale możemy nawet założyć, że $D_f = D_g = \mathbb{R}$ i nadal trzeba uważać...