Funkcje (c.d.).

Przy badaniu ciągłości funkcji ważnym elementem jest udowodnienie nierówności wiążących różnicę argumentów z różnicą wartości funkcji. Dziś kilka przykładów pokazujących jak tego dokonać dla niezbyt skomplikowanych funkcji.

322. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|\,,$$

gdzie $f(x)=\sqrt{x^2+37}$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt{x^2+37}-\sqrt{y^2+37}\right|=\left|\sqrt{x^2+37}-\sqrt{y^2+37}\right|\cdot\frac{\sqrt{x^2+37}+\sqrt{y^2+37}}{\sqrt{x^2+37}+\sqrt{y^2+37}}=$$

$$=\frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+37}+\sqrt{y^2+37}}=|x-y|\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+37}+\sqrt{y^2+37}}\,.$$

Dowód danej w treści zadania nierówności będzie zakończony, jeśli wykażemy nierówność

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+37}+\sqrt{y^2+37}}\leqslant 1\,,$$

która jest równoważna nierówności

$$|x+y|\leqslant\sqrt{x^2+37}+\sqrt{y^2+37}\,.$$

Powyższą nierówność dowodzimy korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}<\sqrt{x^2+37}+\sqrt{y^2+37}\,.$$

323. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt[8]{x^2+10^8}\,.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{4000}\,.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^8-b^8=\left(a^4-b^4\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)=\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)=$$

$$=(a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^4+b^4\right)\,,$$

który przy założeniu $a+b\neq 0$ można zapisać w postaci

$$a-b=\frac{a^8-b^8}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a^4+b^4)}\,.$$

Przyjmując $a=\sqrt[8]{x^2+10^8}$ oraz $b=\sqrt[8]{y^2+10^8}$, zauważamy, że $a+b>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[8]{x^2+10^8}-\sqrt[8]{y^2+10^8}\right|=$$

$$=\left|\frac{(x^2+10^8)-(y^2+10^8)}{\left(\sqrt[8]{x^2+10^8}+\sqrt[8]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^2+10^8}+\sqrt[4]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}\right)}\right|=$$

$$=\frac{|x^2-y^2|}{\left(\sqrt[8]{x^2+10^8}+\sqrt[8]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^2+10^8}+\sqrt[4]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}\right)}=$$

$$=\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[8]{x^2+10^8}+\sqrt[8]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^2+10^8}+\sqrt[4]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}\right)}\,. \tag{1}$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}<\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}\,,$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}}<1\,. \tag{2}$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x^2+10^8}+\sqrt[8]{y^2+10^8}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[8]{0+10^8}+\sqrt[8]{0+10^8}}=\frac{1}{10+10}=\frac{1}{20}\,. \tag{3}$$

Analogicznie

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+10^8}+\sqrt[4]{y^2+10^8}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[4]{0+10^8}+\sqrt[4]{0+10^8}}=\frac{1}{100+100}=\frac{1}{200}\,. \tag{4}$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[8]{x^2+10^8}+\sqrt[8]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^2+10^8}+\sqrt[4]{y^2+10^8}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}\right)}=$$

$$=|x-y|\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{x^2+10^8}+\sqrt[8]{y^2+10^8}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+10^8}+\sqrt[4]{y^2+10^8}}\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}}\leqslant$$

$$\leqslant|x-y|\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{200}\cdot 1=\frac{|x-y|}{4000}\,.$$

324. Niech funkcja $f:[8,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\sqrt[3]{x}$.
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\ y\in[8,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{12}\,.$$

Rozwiązanie:
Przekształcamy zgodnie ze wzorem na różnicę sześcianów lewą stronę dowodzonej nierówności, a następnie szacujemy korzystając z nierówności $x,\ y\geqslant 8$:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right|=\frac{|x-y|}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}\leqslant\frac{|x-y|}{3\cdot\sqrt[3]{8^2}}=\frac{|x-y|}{12}\,,$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x,\ y\geqslant 8$.

325. Niech funkcja $f:[4,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\ y\in[4,\infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{16}\,.$$

Rozwiązanie:
Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x,\ y\geqslant 4$:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right|=\frac{\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}}=\frac{|x-y|}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\cdot\sqrt{xy}}\leqslant\frac{|x-y|}{\left(\sqrt{4}+\sqrt{4}\right)\cdot\sqrt{16}}=$$

$$=\frac{|x-y|}{(2+2)\cdot 4}=\frac{|x-y|}{16}\,,$$

co kończy dowód nierówności danej w treści zadania.