Funkcje (c.d.).

Po wczorajszych opowiastkach o ciągłości funkcji czas na systematyczne opisanie definicji, własności i podstawowych twierdzeń związanych z funkcjami.

Przypominam, że rozważamy funkcje jednej zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych, a dziedziną funkcji może być dowolny podzbiór zbioru liczb rzeczywistych.

Najpierw wyjaśnijmy sobie, co to właściwie jest funkcja. Wprawdzie na co dzień nie będziemy się odwoływać do formalnej definicji funkcji, jednak przynajmniej raz wypadałoby sprecyzować jakiż to obiekt matematyczny jest formalnie uważany[1] za funkcję.

Otóż funkcją[2] będziemy nazywać każdy podzbiór f iloczynu kartezjańskiego[3] $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ spełniający warunek

$$\forall_{x,y_1,y_2\in\mathbb{R}} \Big((x,\,y_1)\,,\,(x,\,y_2)\in f \;\Rightarrow\; y_1=y_2\Big)\,.$$

Innymi słowy, w różnych parach uporządkowanych należących do f pierwsze elementy tych par są różne. Graficzne przedstawienie funkcji na płaszczyźnie z wprowadzonym układem współrzędnych poprzez zaznaczenie punktów zbioru f jest niczym innym niż narysowaniem wykresu funkcji f.

Dziedziną funkcji f jest zbiór pierwszych elementów wszystkich par należących do f, a więc możemy zapisać:

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:\ \exists_{y\in\mathbb{R}}\ (x,y)\in f\right\}\,.$$

Jeżeli $x\in D_f$, to istnieje dokładnie jedno takie $y\in\mathbb{R}$, że $(x,\,y)\in f$. Wówczas piszemy $f(x)=y$ i liczbę y nazywamy warością funkcji f w punkcie x.

Zapamiętaj: Napis $f(x)$ oznacza wartość funkcji f w punkcie x, czyli **liczbę rzeczywistą.** Natomiast f oznacza **funkcję.** Staraj się więc unikać sformułowań w stylu ”funkcja $f(x)$”.

Czasami korci, aby użyć sformułowania ”funkcja x^2”. Jeśli takiego sformulowania użyjemy, to raczej nie będzie ono prowadziło do nieporozumień[4]. Jednak lepiej jest powiedzieć ”funkcja określona wzorem x^2”. Natomiast wtedy, gdy funkcja ma swoją nazwę, używajmy tej właśnie nazwy bez przylepiania do niej argumentu. Mówmy więc ”funkcja sinus”, a nie ”funkcja sinus x”.

Funkcję f określoną wzorem $f(x)=x^2$ możemy formalnie zapisać jako

$$f=\left(x^2:\ x\in\mathbb{R}\right)\,.$$

Formalnie funkcja ta jest zbiorem

$$f=\left\{\left(x,\,x^2\right):\ x\in\mathbb{R}\right\}\,.$$

[1]Bardziej skrupulatne używanie takiej definicji funkcji jest domeną teorii mnogości.

[2]Opis ten jest ograniczony do funkcji zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych.

[3]Czyli zbioru wszystkich par uporządkowanych liczb rzeczywistych.

[4]Podobnie jak nie ma obawy o nieporozumienie, gdy użyjemy słów *poszłem* czy *szejset.* To jednak nie jest wystarczającym powodem, aby takich właśnie form używać.

Podstawowe własności funkcji.

Funkcja f jest **rosnąca**[5] wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\underset{x_1,x_2\in D_f}{\forall} \left(x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\right).$$

Funkcja f jest **niemalejąca**[6] wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\underset{x_1,x_2\in D_f}{\forall} \left(x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\leqslant f(x_2)\right).$$

Funkcja f jest **malejąca**[7] wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\underset{x_1,x_2\in D_f}{\forall} \left(x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)\right).$$

Funkcja f jest **nierosnąca**[8] wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\underset{x_1,x_2\in D_f}{\forall} \left(x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\geqslant f(x_2)\right).$$

Funkcja f jest **monotoniczna**[9] wtedy i tylko wtedy, gdy jest niemalejąca lub nierosnąca.

Funkcja f jest **ściśle monotoniczna** wtedy i tylko wtedy, gdy jest rosnąca lub malejąca.

Funkcja f jest **różnowartościowa** wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\underset{x_1,x_2\in D_f}{\forall} \left(x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)\right).$$

Funkcja f jest **na** .... to nic nie znaczy[10].

Funkcja f przekształca D_f **na zbiór** $Y\subset\mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\left(\underset{x\in D_f}{\forall} f(x)\in Y\right) \land \left(\underset{y\in Y}{\forall}\ \underset{x\in D_f}{\exists} f(x)=y\right).$$

Funkcja f jest **parzysta** wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\underset{x\in D_f}{\forall} \left(-x\in D_f \land f(-x)=f(x)\right).$$

Funkcja f jest **nieparzysta** wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\underset{x\in D_f}{\forall} \left(-x\in D_f \land f(-x)=-f(x)\right).$$

Funkcja f jest **okresowa** o okresie $T>0$ wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\underset{x\in D_f}{\forall} \left(x-T, x+T\in D_f \land f(x+T)=f(x)\right).$$

[5]Inaczej: ściśle rosnąca. Takiej formy użyjemy dla podkreślenia, że chodzi nam o ostrą nierówność w następniku implikacji.

[6]Inaczej: słabo rosnąca.

[7]Inaczej: ściśle malejąca. Takiej formy użyjemy dla podkreślenia, że chodzi nam o ostrą nierówność w następniku implikacji.

[8]Inaczej: słabo malejąca.

[9]Inaczej: słabo monotoniczna.

[10]Czy funkcja sinus jest "na"? Zależy na jaki zbiór. Na przedział $[-1,1]$ – TAK. Na $\mathbb{R}$ – NIE.

Operacje na funkcjach.

Suma funkcji f i g to funkcja $f+g$ określona wzorem

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

o dziedzinie

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g\,.$$

Różnica funkcji f i g to funkcja $f-g$ określona wzorem

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

o dziedzinie

$$D_{f-g}=D_f\cap D_g\,.$$

Iloczyn funkcji f i g to funkcja $f\cdot g$ (lub fg) określona wzorem

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$$

o dziedzinie

$$D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g\,.$$

Iloraz funkcji f i g to funkcja f/g określona wzorem

$$(f/g)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

o dziedzinie

$$D_{f/g}=\{x\in D_f\cap D_g:\ g(x)\neq 0\}\,.$$

Złożenie[11] **funkcji** f i g to funkcja $f\circ g$ określona wzorem

$$(f\circ g)(x)=f((g(x))$$

o dziedzinie

$$D_{f\circ g}=\{x\in D_g:\ g(x)\in D_f\}\,.$$

Funkcja odwrotna do funkcji **różnowartościowej** f to funkcja[12]

$$f^{-1}=\{(f(x),x):\ x\in D_f\}\,.$$

Innymi słowy jest to taka funkcja f^{-1} o dziedzinie

$$D_{f^{-1}}=\{f(x):\ x\in D_f\}\,,$$

że dla każdego $x\in D_f$ zachodzi równość

$$f^{-1}(f(x))=x$$

lub równoważnie: dla każdego $y\in D_{f^{-1}}$ zachodzi równość

$$f\left(f^{-1}(y)\right)=y\,.$$

[11]Inaczej: superpozycja.

[12]Pamiętaj, że

$$f=\{(x,f(x)):\ x\in D_f\}\,.$$

Przykłady funkcji.

Funkcją wielomianową jest każda funkcja f określona wzorem postaci[13]

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i ,$$

gdzie liczby rzeczywiste a_0, a_1, a_2, ..., a_n są nazywane współczynnikami wielomianu. Dziedziną funkcji wielomianowej jest $\mathbb{R}$.

Funkcja wymierna to iloraz dwóch funkcji wielomianowych[14]. Dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych z wyłączeniem miejsc zerowych mianownika.

Funkcje potęgowe to funkcje określone wzorem x^a. Dziedzina zależy od liczby $a\neq 0$:

• $\mathbb{R}$, gdy a jest dodatnią liczbą wymierną o nieparzystym mianowniku[15].

• $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, gdy a jest ujemną liczbą wymierną o nieparzystym mianowniku.

• $[0,\infty)$, gdy a jest dodatnią liczbą wymierną o parzystym mianowniku lub dodatnią liczbą niewymierną.

• $(0,\infty)$, gdy a jest ujemną liczbą wymierną o parzystym mianowniku lub ujemną liczbą niewymierną.

Funkcja wykładnicza to funkcja f określona wzorem

$$f(x)=a^x ,$$

gdzie $a\in(0,\,\infty)\setminus\{1\}$. Dziedziną funkcji wykładniczej jest $\mathbb{R}$.

Funkcja logarytmiczna to funkcja odwrotna do odpowiedniej funkcji wykładniczej:

$$f(x)=\log_a x ,$$

gdzie $a\in(0,\,\infty)\setminus\{1\}$. Dziedziną funkcji logarytmicznej jest $(0,\,\infty)$.

Funkcje trygonometryczne:

• **sinus**: o dziedzinie $\mathbb{R}$, okresowa o okresie 2π.

• **cosinus**: o dziedzinie $\mathbb{R}$, okresowa o okresie 2π.

• **tangens**: o dziedzinie $\mathbb{R}\setminus\left\{n\pi+\frac{\pi}{2}:\ n\in\mathbb{Z}\right\}$, okresowa o okresie π.

Funkcje odwrotne do trygonometrycznych:

• **arcsin**: o dziedzinie $[-1,\,1]$, odwrotna do sinusa ograniczonego do przedziału $\left[-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right]$.

• **arccos**: o dziedzinie $[-1,\,1]$, odwrotna do cosinusa ograniczonego do przedziału $[0,\,\pi]$.

• **arctg**: o dziedzinie $\mathbb{R}$, odwrotna do tangensa ograniczonego do przedziału $\left(-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right)$.

[13] Umawiamy się, że $x^0=1$ i nie czepiamy się tego, że dla $x=0$ dostalibyśmy wyrażenie 0^0.
[14] Zakładamy, że mianownik nie jest funkcją stałą równą 0.
[15] Po zapisaniu liczby w postaci ułamka nieskracalnego.