Kolokwium 1.12.2020.

Kolokwium nr 1 odbędzie się we wtorek 1 grudnia 2020 r. w godzinach 12:15-14:00.

Podczas kolokwium należy dołączyć do spotkania na kanale wykładu w MS Teams i mieć włączoną kamerkę oraz wyciszony mikrofon.

Podczas kolokwium nie wolno korzystać z żadnych pomocy (np. notatek powstałych przed rozpoczęciem kolokwium, kalkulatora, pomocy innych osób, internetu w zakresie wykraczającym poza obsługę techniczną kolokwium).

Część I kolokwium (12:15-13:15) będzie polegała na udzieleniu odpowiedzi liczbowych (liczby całkowite lub wymierne zapisane w postaci ułamka nieskracalnego) na 15 pytań na Moodlu (po 2 punkty za pytanie).

Część II kolokwium (13:20-14:00) będzie polegała na zredagowaniu na kartce rozwiązań 2 zadań otwartych (po 10 punktów za zadanie), zeskanowanie/sfotografowanie ich, a następnie przesłanie skanów przez Moodla.

Kolokwium obejmuje materiał od początku semestru do szeregów włącznie, czyli do wykładu 19 i listy 14 włącznie.

Funkcje.

Przechodzimy do badania funkcji jednej zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych. Systematyczne zebranie podstawowych własności oraz przykładów odłożę na kolejne wykłady, a dziś, ze względu na towarzyszące wykładowi spotkanie w Teamsach, chciałbym opowiedzieć o jednej z kluczowych własności funkcji, a mianowicie o ciągłości. Będę przy tym zakładał, że macie jaką-taką orientację, co to są funkcje.

Jedna rzecz wymaga wyjaśnienia. Jakie zbiory dopuszczamy jako dziedzinę funkcji? Otóż przyjmiemy, że każdy podzbiór zbioru liczb rzeczywistych, nawet najbardziej kapryśny, może być dziedziną rozważanej przez nas funkcji.

Przykłady funkcji.

$$f_1(x)=\frac{x^2-1}{x-1} \qquad D_{f_1}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{dla } x\neq 1\\ 1 & \text{dla } x=1\end{cases} \qquad D_{f_2}=\mathbb{R}$$

$$f_3(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{dla } x\neq 1\\ 2 & \text{dla } x=1\end{cases} \qquad D_{f_3}=\mathbb{R}$$

$$f_4(x)=\frac{1}{x} \qquad D_{f_4}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$f_5(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} -1 & \text{dla} \quad x<0 \\ 0 & \text{dla} \quad x=0 \\ 1 & \text{dla} \quad x>0 \end{cases} \qquad D_{f_5}=\mathbb{R}$$

$$f_6(x)=[x]=n \quad \text{dla} \quad n\in\mathbb{Z} \wedge n\leqslant x<n+1 \qquad D_{f_6}=\mathbb{R}$$

$$f_7(x)=\{x\}=x-[x]=x-n \quad \text{dla} \quad n\in\mathbb{Z} \wedge n\leqslant x<n+1 \qquad D_{f_7}=\mathbb{R}$$

$$f_8(x)=\sqrt{x} \qquad D_{f_8}=[0,\infty)$$

$$f_9(x)=\begin{cases} 2 & \text{dla} \quad x=-4 \\ \sqrt{x} & \text{dla} \quad x\geqslant 0 \end{cases} \qquad D_{f_9}=\{-4\}\cup[0,\infty)$$

$$f_{10}(x)=\sqrt{x}+\sqrt{-x} \qquad D_{f_{10}}=\{0\}$$

$$f_{11}(x)=\sqrt{x}+\sqrt{-x-1} \qquad D_{f_{11}}=\emptyset$$

$$f_{12}(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x=0 \end{cases} \qquad D_{f_{12}}=\mathbb{R}$$

$$f_{13}(x)=\begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x\in\mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \qquad D_{f_{13}}=\mathbb{R}$$

$$f_{14}(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x\in\mathbb{Q} \\ -x^2 & \text{dla} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \qquad D_{f_{14}}=\mathbb{R}$$

$$f_{15}(x)=\frac{1}{\sin\frac{1}{x}} \qquad D_{f_{15}}=\mathbb{R}\setminus\{0\}\setminus\left\{\tfrac{1}{\pi n}:\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$$

$$f_{16}(x)=\begin{cases} x & \text{dla} \quad x\leqslant 0 \\ x+1 & \text{dla} \quad x>0 \end{cases} \qquad D_{f_{16}}=\mathbb{R}$$

$$f_{17}(x)=\begin{cases} x & \text{dla} \quad x<0 \\ x+1 & \text{dla} \quad x\geqslant 0 \end{cases} \qquad D_{f_{17}}=\mathbb{R}$$

$$f_{18}(x)=\begin{cases} x & \text{dla} \quad x<0 \\ 2 & \text{dla} \quad x=0 \\ x+1 & \text{dla} \quad x>0 \end{cases} \qquad D_{f_{18}}=\mathbb{R}$$

Ciągłość[1] funkcji (definicja Cauchy'ego[2]).

Definicja: Funkcja f jest **ciągła w punkcie** $x_0 \in D_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in(x_0-\delta,\,x_0+\delta)\cap D_f}{\forall} |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

Inne formy zapisu powyższego warunku to:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{\substack{x\in D_f\\ |x-x_0|<\delta}}{\forall} |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in D_f}{\forall} \left(|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\right)$$

Definicja: **Funkcja** f jest **ciągła** wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny, czyli spełnia warunek[3]:

$$\underset{x_0\in D_f}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in(x_0-\delta,\,x_0+\delta)\cap D_f}{\forall} |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

$$\underset{x_0\in D_f}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{\substack{x\in D_f\\ |x-x_0|<\delta}}{\forall} |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

$$\underset{x_0\in D_f}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in D_f}{\forall} \left(|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\right)$$

Ciągłość funkcji (definicja Heinego[4]).

Definicja: Funkcja f jest **ciągła w punkcie** $x_0 \in D_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach należących do D_f i zbieżnego do x_0 zachodzi[5]

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)\ .$$

Definicja: **Funkcja** f jest **ciągła** wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny, czyli gdy dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach należących do D_f i zbieżnego do punktu należącego do D_f zachodzi[6]

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\ .$$

[1] Zwracam uwagę, że na razie nie mówimy w ogóle o granicy funkcji w punkcie.
[2] Zwana czasami definicją epsilonowo-deltową.
[3] Podane są 3 zapisy tego samego warunku.
[4] Zwana też definicją ciągową.
[5] W tym zapisie znajduje się ukryte założenie, że ciąg $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny. Nie piszę tego wyraźnie w definicji, aby nie komplikować dodatkowo jej sfromułowania.
[6] W tym zapisie również jest ukryte założenie, że ciąg $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny.