Indukcja matematyczna (c.d.)

Przede wszystkim przeczytaj "Opowieści o indukcji", które znajdują się na stronie wykładu pod datą 6.10.2020 i linkiem "Do przeczytania !!!!!".

A teraz wróćmy do przykładu, którego nie zdążyliśmy wczoraj omówić:

4. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n oraz każdych liczb rzeczywistych dodatnich $a_1,a_2,\ldots,a_n$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} .$$

Powyższe zadanie jest nie tylko zadankiem do rozwiązania, ale jego teza jest ważną nierównością, a mianowicie nierównością między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną. Teza zadania mówi, że średnia geometryczna nie przekracza średniej arytmetycznej. Dodajmy jeszcze, że w powyższej nierówności równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby $a_1,a_2,\ldots,a_n$ są równe. Nie będziemy tego dowodzić, aby dodatkowo nie komplikować dowodu, ale wystarczyłoby dokładnie prześledzić zaprezentowany poniżej dowód i zobaczyć, kiedy możliwa jest równość.

Jak nietrudno się domyślić, przeprowadzimy dowód indukcyjny, ale indukcja będzie przebiegać w dość nietypowy sposób. W dowodzie indukcyjnym zajmiemy się zdaniem $T(n)$, które brzmi następująco:

Dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $a_1,a_2,\ldots,a_n$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} .$$

1° Na początek w dobrej wierze zajmijmy się przypadkiem $n=1$. Zdanie $T(1)$ przybiera postać:

Dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a_1 zachodzi nierówność

$$a_1 \leqslant a_1 .$$

Powyższe zdanie jest oczywiście prawdziwe, chociaż, mówiąc delikatnie, nie niesie zbyt głębokiej treści.

2° Przypatrzmy się teraz $n=2$. Zdanie $T(2)$ brzmi:

Dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a_1,a_2 zachodzi nierówność

$$\sqrt{a_1a_2} \leqslant \frac{a_1+a_2}{2} .$$

Powyższą nierówność udowodnimy przekształcając ją do kolejnych postaci równoważnych:

$$2\cdot\sqrt{a_1a_2} \leqslant a_1+a_2 ,$$

$$4a_1a_2 \leqslant a_1^2+2a_1a_2+a_2^2 ,$$

$$0 \leqslant a_1^2-2a_1a_2+a_2^2 ,$$

$$0 \leqslant (a_1-a_2)^2 ,$$

co jest prawdą, gdyż kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny.

Gdyby miało nam się udać przeprowadzenie w prosty sposób standardowego dowodu indukcyjnego, to powinniśmy udowodnić implikacje $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ dla wszystkich n. W szczególności byłby tam dowód implikacji $T(2) \Rightarrow T(3)$. Czyli z nierówności między średnimi dla dowolnych 2 liczb powinniśmy jakimś sposobem wywnioskować nierówność między średnimi dla 3 liczb. Wydaje się, że do tego potrzebna byłaby umiejętność wyrażenia średniej, powiedzmy arytmetycznej, 3 liczb, przez operację brania średniej 2 liczb. To jednak nie jest możliwe. Na przykład średnia arytmetyczna trzech liczb: 1, 2, 4 jest równa 7/3, a wielokrotne obliczanie średniej arytmetycznej dwóch liczb, stosowane do liczb 1, 2, 4 oraz wszelakich średnich powstałych po drodze, może nas doprowadzić jedynie do liczb wymiernych, których mianownik jest potęgą dwójki. Mając więc maszynkę, która oblicza średnią arytmetyczną dwóch liczb i wrzucając do niej liczby 1, 2, 4, nigdy nie otrzymamy liczby 7/3, nawet jak maszynka będzie liczyć średnie tych liczb i średnie ich średnich i średnie średnich średnich w najrozmaitszych kombinacjach.

Takie argumenty powinny wystarczająco zniechęcić do podejmowania próby przeprowadzenia standardowego dowodu indukcyjnego.

Zauważmy jednak, że obliczanie średniej (jakiejkolwiek: arytmetycznej, geometrycznej czy innej sensownej) czterech liczb da się przeprowadzić poprzez obliczanie średniej dwóch liczb — po prostu liczymy średnią dwóch średnich par liczb:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} = \frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}\,.$$

Ogólniej: jeśli mamy prostokątną tablicę liczb, to ich średnia jest średnią średnich liczonych w kolumnach (lub jak kto woli średnią średnich liczonych w wierszach).

To prowadzi do pomysłu, aby udwodnić implikację $T(n) \Rightarrow T(2n)$.

3° Udowodnimy więc, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest implikacja

$$T(n) \Rightarrow T(2n)\,.$$

W tym celu zakładamy $T(n)$:
Dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\,.$$

Przy powyższym założeniu dowodzimy $T(2n)$:
Dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[2n]{a_1 a_2 \ldots a_{2n}} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2n}}{2n}\,.$$

Wychodzimy od lewej strony dowodzonej nierówności i dochodzimy do strony prawej korzystając dwukrotnie z zakładanego $T(n)$ oraz z udowodnionego wcześniej $T(2)$:

$$L = \sqrt[2n]{a_1 a_2 \ldots a_{2n}} = \sqrt{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \cdot \sqrt[n]{a_{n+1} a_{n+2} \ldots a_{2n}}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \cdot \frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n}}{n}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}+\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n}}{n}}{2} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2n}}{2n} = P\,.$$

Doprecyzujmy, że z nierówności między średnimi n liczb skorzystaliśmy dwukrotnie: dla liczb $a_1,a_2,\ldots,a_n$ oraz dla liczb $a_{n+1},a_{n+2},\ldots,a_{2n}$. Ponadto skorzystaliśmy z nierówności między średnimi dla 2 liczb:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n}}{n}\,.$$

Podsumujmy, co w tej chwili mamy. Udowodniliśmy $T(1)$, $T(2)$ oraz wszystkie implikacje $T(n)\Rightarrow T(2n)$ dla liczb naturalnych n. To raczej nie dowodzi prawdziwości $T(n)$ dla wszystkich n. Ale dla których n taki dowód już mamy?

Wśród implikacji $T(n)\Rightarrow T(2n)$ mamy w szczególności:
$T(2)\Rightarrow T(4)$, co wobec udowodnionego $T(2)$ daje $T(4)$,
$T(3)\Rightarrow T(6)$, co wobec braku dowodu $T(3)$ niczego nie daje,
$T(4)\Rightarrow T(8)$, co wobec udowodnionego $T(4)$ daje $T(8)$,
$T(8)\Rightarrow T(16)$, co wobec udowodnionego $T(8)$ daje $T(16)$,
$T(16)\Rightarrow T(32)$, co wobec udowodnionego $T(16)$ daje $T(32)$...

Udowodniliśmy więc $T(n)$ dla n będących potęgami dwójki. Czyli dla dowolnie dużych, ale tylko niektórych n.

Dowód indukcyjny dopełni się, jeśli będziemy mogli schodzić w dół.

4° Udowodnimy zatem, że implikacja $T(n)\Rightarrow T(n-1)$ jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 2$.

W tym celu zakładamy $T(n)$:
Dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $a_1,a_2,\ldots,a_n$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\,.$$

Przy powyższym założeniu dowodzimy $T(n-1)$:
Dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_{n-1}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n-1}\,.$$

Mamy więc danych $n-1$ liczb: $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}$. I chcemy coś udowodnić o ich średnich, ale możemy wykorzystać założenie indukcyjne, które używa n liczb. Gdzie znaleźć brakującą n-tą liczbę? Otóż średnia (jakakolwiek sensowna) układu liczb nie zmieni się, jeśli dołożymy do tego układu liczbę równą średniej. Oczekujemy więc, że dołożenie do liczb $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}$ ich średnej geometrycznej

$$a_n=\sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_{n-1}}$$

doprowadzi nas do układu n liczb $a_1,a_2,\ldots,a_n$ o tej samej średniej geometrycznej.

Sprawdźmy:

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_{n-1}\cdot\sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_{n-1}}}=$$

$$=(a_1a_2\ldots a_{n-1})^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n-1)}}=(a_1a_2\ldots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}=\sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_{n-1}}\,.$$

Wobec tego możemy zastosować założenie indukcyjne do liczb $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Otrzymamy:

$$a_n = \sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_{n-1}} = \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

czyli

$$a_n \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Proste przekształcenia powyższej nierówności dają kolejno

$$\frac{n-1}{n}\cdot a_n \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n},$$

$$a_n \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n-1},$$

$$\sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_{n-1}} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n-1}.$$

A to jest nierówność, którą mieliśmy udowodnić.

Podsumujmy: Udowodniliśmy $T(1)$, $T(2)$, wszystkie implikacje $T(n)\Rightarrow T(2n)$ oraz wszystkie implikacje $T(n)\Rightarrow T(n-1)$. Jeśli wyobrazimy sobie powstały schemat wynikań, zobaczymy, że tymi implikacjami można dojść do każdej liczby naturalnej, a więc taka pokraczna indukcja też działa.

Jeśli ktoś nadal nie jest przekonany, że taki schemat indukcyjny jest poprawny, niech sobie wyobrazi grę planszową o następujących regułach:
- plansza ma nieskończenie wiele pól ponumerowanych liczbami naturalnymi,
- można postawić pionek na polu z numerem 1,
- można postawić pionek na polu z numerem 2,
- można przesunąć pionek z pola numer n na pole numer $2n$,
- można przesunąć pionek z pola numer n na pole numer $n-1$.

Czy zgodnie z tymi regułami pionek może się znaleźć na dowolnym polu?