Konstruowanie przykładów szeregów.

Szeregi geometryczne mogą służyć do konstruowania przykładów szeregów o zadanych własnościach. Popatrzmy na kilka tego typu zagadnień.

260. Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunki

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 15\,.$$

Rozwiązanie:

Niech q będzie ilorazem szeregu geometrycznego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Wówczas dodatniość wyrazów i zbieżność szeregu pociągają nierówności $a_1>0$ oraz $0<q<1$, a wyrazy szeregu wyrażają się wzorem $a_n=a_1q^{n-1}$. Ponadto ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}\,.$$

Ponieważ wyrazy szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

wyrażają się wzorem

$$a_n^2 = a_1^2 \cdot \left(q^2\right)^{n-1}\,,$$

szereg ten jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie a_1^2 i ilorazie q^2. Wobec tego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{a_1^2}{1-q^2}\,.$$

Zatem warunki podane w treści zadania przyjmują postać

$$\frac{a_1}{1-q} = 5 \qquad \text{oraz} \qquad \frac{a_1^2}{1-q^2} = 15\,,$$

co po przekształceniu prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} a_1 &=& 5\cdot(1-q) \\ a_1^2 &=& 15\cdot(1-q)\cdot(1+q) \end{cases}$$

Podstawienie $a_1=5\cdot(1-q)$ do drugiego równania daje

$$25\cdot(1-q)^2 = 15\cdot(1-q)\cdot(1+q)\,,$$

skąd po uwzględnieniu $q\neq1$ i podzieleniu obustronnie przez $5\cdot(1-q)$ otrzymujemy kolejno

$$5-5q = 3q+3\,,$$

$$q=1/4, \qquad a_1 = 15/4\,.$$

Odpowiedź: Jedynym szeregiem geometrycznym spełniającym warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{15}{4^n}\,.$$

261. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = \frac{15}{2}\,.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n = cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c > 0$ oraz $0 < q < 1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} c^2 q \left(q^2\right)^{n-1} = \frac{c^2 q}{1-q^2}\,,$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{c}{1-q} = 15/2 \\ \dfrac{c^2 q}{1-q^2} = 15/2\,, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} c = 15(1-q)/2 \\ c^2 q = 15\left(1-q^2\right)/2\,. \end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy

$$cq = 1+q\,,$$

co po podstawieniu do pierwszego równania przemnożonego przez q daje kolejno

$$1+q = 15q/2 - 15q^2/2\,,$$

$$2+2q = 15q - 15q^2\,,$$

$$15q^2 - 13q + 2 = 0\,,$$

$$q = \frac{13 \pm 7}{30}\,,$$

skąd

$$q = 2/3, \qquad c = 5/2$$

lub

$$q = 1/5, \qquad c = 6\,.$$

Otrzymane rozwiązania prowadzą odpowiednio do

$$a_n = cq^{n-1} = \frac{5 \cdot 2^{n-2}}{3^{n-1}} \quad \text{oraz} \quad a_n = cq^{n-1} = \frac{6}{5^{n-1}}\,.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{5^{n-1}}\,.$$

262. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + a_{n+1}\right)^2 = \frac{9}{8}\,.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n = cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c > 0$ oraz $0 < q < 1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + a_{n+1}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c^2(1+q)^2 \cdot \left(q^2\right)^{n-1} = \frac{c^2 \cdot (1+q)^2}{1-q^2}\,,$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{c}{1-q} = \dfrac{9}{8} \\ \dfrac{c^2 \cdot (1+q)^2}{1-q^2} = \dfrac{9}{8} \end{cases},$$

czyli

$$\begin{cases} 8c = 9(1-q) \\ 8c^2 \cdot (1+q) = 9\,(1-q) \end{cases}.$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy

$$c \cdot (1+q) = 1\,,$$

co po podstawieniu do pierwszego równania przemnożonego przez $1+q$ daje kolejno

$$8 = 9 \cdot \left(1-q^2\right)\,,$$

$$8/9 = 1-q^2\,,$$

$$q^2 = 1/9\,,$$

skąd

$$q = 1/3, \qquad c = 1/(1+q) = 3/4\,.$$

Otrzymane rozwiązanie prowadzi do

$$a_n = cq^{n-1} = \frac{1}{4 \cdot 3^{n-2}}\,.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot 3^{n-2}}\,.$$

263. Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunki

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = 2\,.$$

Rozwiązanie:

Niech q będzie ilorazem szeregu geometrycznego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Wówczas dodatniość wyrazów i zbieżność szeregu pociągają nierówności $a_1 > 0$ oraz $0 < q < 1$, a wyrazy szeregu wyrażają się wzorem $a_n = a_1 q^{n-1}$. Ponadto ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}\,.$$

Ponieważ wyrazy szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$$

wyrażają się wzorem

$$a_{2n} = a_1 q \cdot \left(q^2\right)^{n-1}\,,$$

szereg ten jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $a_1 q$ i ilorazie q^2. Wobec tego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \frac{a_1 q}{1-q^2}\,.$$

Zatem warunki podane w treści zadania przyjmują postać

$$\frac{a_1}{1-q} = 5 \qquad \text{oraz} \qquad \frac{a_1 q}{1-q^2} = 2\,,$$

co po przekształceniu prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} a_1 &= 5\cdot(1-q) \\ a_1 q &= 2\cdot(1-q)\cdot(1+q) \end{cases}$$

Podstawienie $a_1 = 5\cdot(1-q)$ do drugiego równania daje

$$5\cdot(1-q)\cdot q = 2\cdot(1-q)\cdot(1+q)\,,$$

skąd po uwzględnieniu $q \neq 1$ i podzieleniu obustronnie przez $1-q$ otrzymujemy kolejno

$$5q = 2q + 2\,,$$

$$q = 2/3, \qquad a_1 = 5/3\,.$$

Odpowiedź: Jedynym szeregiem geometrycznym spełniającym warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 2^{n-1}}{3^n}\,.$$