Szeregi liczbowe (ułamki proste i sumy teleskopowe).

253. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n} .$$

Rozwiązanie:

W ogólnym przypadku obliczenie sumy szeregu, w którym n-ty wyraz wyraża się jako funkcja wymierna od n, jest beznadziejnie trudne[1]. Jednak w pewnych sytuacjach możemy wyliczyć sumę częściową takiego szeregu i bez problemu przejść z nią do granicy.

Algorytm[2], który daje szansę (ale nie gwarancję) powodzenia jest następujacy:

Rozkładamy mianownik wyrazu ogólnego szeregu na iloczyn różnych czynników liniowych.

To nie zawsze jest możliwe. Jednak w rozważanym przykładzie się udaje:

$$n^2-n=(n-1)\cdot n .$$

Rozkładamy wyraz ogólny szeregu na sumę ułamków prostych.

Ułamkiem prostym[3] jest funkcja wymierna o stałym liczniku i liniowym mianowniku. Mianownik musi być jednym z czynników liniowych, na które rozłożyliśmy mianownik wyrazu ogólnego szeregu.

W naszym przypadku szukamy tożsamości[4] postaci

$$\frac{1}{n^2-n}=\frac{A}{n-1}+\frac{B}{n} ,$$

czyli

$$1=A\cdot n+B\cdot (n-1) . \qquad (\clubsuit)$$

Wyznaczenie współczynników A i B możemy przeprowadzić na dwa sposoby. Pierwszy sposób to wymnożenie prawej strony równości ($\clubsuit$) i porównanie współczynników przy tych samych potęgach n występujących po obu stronach. To prowadzi do układu dwóch równań liniowych, który bez problemu rozwiązujemy.

Zastosujemy drugi sposób[5], który polega na podstawianiu za n takich wartości[6], przy których zerują się poszczególne czynniki mianownika.

---

[1]Czego najlepszym dowodem jest wspomniana wcześniej równość $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

[2]Podana jest wersja algorytmu odnosząca się do najprostszej sytuacji.

[3]Co to naprawdę jest ułamek prosty, dowiemy się w drugim semestrze przy okazji całkowania funkcji wymiernych. Tutaj odnosimy się tylko do najprostszej sytuacji.

[4]A więc tak naprawdę szukamy odpowiednich liczb A i B.

[5]Tutaj akurat nie widać przewagi drugiego sposobu nad pierwszym, ale przy większej liczbie czynników mianownika korzyści z zastosowania drugiego sposobu stają się zauważalne.

[6]Chociaż n przebiega liczby naturalne, to tożsamośc wielomianowa jeśli już ma miejsce, to jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych. Dlatego za n możemy podstawiać liczby, które nie są naturalne (np. ujemne lub ułamkowe).

W rozważanym przykładzie czynniki mianownika $n-1$ i n zerują się odpowiednio dla $n=1$ i $n=0$. Podstawiając te wartości do równania (♣) dostajemy jak na tacy kolejne współczynniki:

dla $n=1$ $$1=A\,,$$

dla $n=0$ $$1=-B\,.$$

W konsekwencji[7]

$$\frac{1}{n^2-n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\,.$$

Wyliczamy sumę częściową szeregu i przechodzimy do granicy.

Uzyskana tożsamość pozwala[8] wyliczyć[9] sumę częściową rozważanego szeregu

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2-n}=\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{N-3}-\frac{1}{N-2}\right)+\left(\frac{1}{N-2}-\frac{1}{N-1}\right)+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}\right)=1-\frac{1}{N}\,,$$

co dąży do 1 przy $N\to\infty$. Zatem suma danego szeregu jest równa 1:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)\cdot n}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots=1\,.$$

254. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3-n}\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (standardowy):

Najpierw zauważmy, że

$$n^3-n=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\,.$$

Rozkładamy wyrażenie pod znakiem sumy na ułamki proste, czyli szukamy takich liczb A, B i C, że

$$\frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{A}{n-1}+\frac{B}{n}+\frac{C}{n+1}\,.$$

---

[7]Ta tożsamość powinna szczególnie ucieszyć osoby, które mają zwyczaj pisać mało czytelnie. Wynika z niej bowiem, że między odwrotnościami kolejnych liczb całkowitych można z tym samym skutkiem pisać znak "minus" jak i "razy". A więc w tym przypadku znaki wyglądające jak coś pomiędzy "minus" i "razy" nie prowadzą do nieporozumień:

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$$

[8]Albo nie pozwala. To się czasami udaje, a czasami nie.

[9]Otrzymujemy tak zwaną sumę teleskopową, czyli taką, gdzie wyrazy z sąsiednich lub bliskich nawiasów się upraszczają. Nieuproszczone pozostaje kilka wyrazów z nawiasów początkowych i końcowych.

Po wymnożeniu powyższej równości stronami przez $(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$ otrzymujemy

$$1=A\cdot n\cdot(n+1)+B\cdot(n-1)\cdot(n+1)+C\cdot(n-1)\cdot n\,.$$

Dla $n=1$ otrzymujemy $A=1/2$, dla $n=0$ dostajemy $B=-1$, natomiast przyjęcie $n=-1$ daje $C=1/2$. Można też ułożyć układ równań na współczynniki i go rozwiązać.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem[10]

$$S_N=\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^3-n}=\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1/2}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1/2}{n+1}\right)=$$

$$=\left(\frac{1/2}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1/2}{3}\right)+\left(\frac{1/2}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1/2}{4}\right)+\left(\frac{1/2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1/2}{5}\right)+\left(\frac{1/2}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1/2}{6}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{1/2}{N-3}-\frac{1}{N-2}+\frac{1/2}{N-1}\right)+\left(\frac{1/2}{N-2}-\frac{1}{N-1}+\frac{1/2}{N}\right)+\left(\frac{1/2}{N-1}-\frac{1}{N}+\frac{1/2}{N+1}\right)=$$

$$=\frac{1/2}{1}-\frac{1/2}{2}-\frac{1/2}{N}+\frac{1/2}{N+1}=\frac{1}{4}-\frac{1/2}{N}+\frac{1/2}{N+1}\,,$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $1/4$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $1/4$.

Sposób II (trikowy, wykorzystujący bardzo szczególną postać szeregu):

Opieramy się na tożsamości

$$\frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{1/2}{(n-1)\cdot n}-\frac{1/2}{n\cdot(n+1)}\,.$$

Dzięki niej wyliczamy sumy częściowe szeregu:

$$S_N=\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^3-n}=\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1/2}{(n-1)\cdot n}-\frac{1/2}{n\cdot(n+1)}\right)=$$

$$=\left(\frac{1/2}{1\cdot 2}-\frac{1/2}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1/2}{2\cdot 3}-\frac{1/2}{3\cdot 4}\right)+\left(\frac{1/2}{3\cdot 4}-\frac{1/2}{4\cdot 5}\right)+\left(\frac{1/2}{4\cdot 5}-\frac{1/2}{5\cdot 6}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{1/2}{(N-3)\cdot(N-2)}-\frac{1/2}{(N-2)\cdot(N-1)}\right)+\left(\frac{1/2}{(N-2)\cdot(N-1)}-\frac{1/2}{(N-1)\cdot N}\right)+$$

$$+\left(\frac{1/2}{(N-1)\cdot N}-\frac{1/2}{N\cdot(N+1)}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1/2}{N\cdot(N+1)}\,,$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $1/4$.

[10]Upraszczamy ułamki o tych samych mianownikach, np.

$$-\frac{1}{2}+\frac{1/2}{2}=-\frac{1/2}{2}$$

oraz

$$\frac{1/2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1/2}{3}=0\,.$$

255. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\,.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że
$$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1}\,.$$
Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $(2n-1)(2n+1)$ otrzymujemy
$$1=A(2n+1)+B(2n-1)\,. \qquad (*)$$
Dla $n=1/2$ otrzymujemy $A=1/2$, natomiast przyjęcie $n=-1/2$ daje $B=-1/2$.
Inny sposób: porównując w równaniu (*) współczynniki przy n oraz wyrazy wolne dostajemy układ równań i go rozwiązujemy.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem
$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\left(\frac{1}{2N-5}-\frac{1}{2N-3}\right)+\left(\frac{1}{2N-3}-\frac{1}{2N-1}\right)+\left(\frac{1}{2N-1}-\frac{1}{2N+1}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2N+1}\right),$$
co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $1/2$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $1/2$.

Uwaga: Rozwiązanie opierające się na poniższych przekształceniach jest błędne (pomimo poprawnej odpowiedzi liczbowej). Ta sama uwaga dotyczy pozostałych zadań.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{13}\right)+\ldots\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\ldots\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)+\left(-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)+\left(-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}\right)+\ldots\right)=$$
$$=\frac{1}{2}(1+0+0+0+0+0+\ldots)=\frac{1}{2}$$
Mamy bowiem podobny rachunek prowadzący do równości $0=1$:
$$0=0+0+0+0+0+0+\ldots=(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=$$
$$=1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots=$$
$$=1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\ldots=1+0+0+0+0+0+\ldots=1$$

256. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+3)} .$$

Rozwiązanie:

Rozkładamy wyrażenie pod znakiem sumy na ułamki proste, czyli szukamy takich liczb A, B i C, że

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+3)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+3} .$$

Po wymnożeniu powyższej równości stronami przez $n\cdot(n+1)\cdot(n+3)$ otrzymujemy

$$1=A\cdot(n+1)\cdot(n+3)+B\cdot n\cdot(n+3)+C\cdot n\cdot(n+1) .$$

Dla $n=0$ otrzymujemy $A=1/3$, dla $n=-1$ dostajemy $B=-1/2$, natomiast przyjęcie $n=-3$ daje $C=1/6$. Można też ułożyć układ równań na współczynniki i go rozwiązać.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+3)}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1/3}{n}-\frac{1/2}{n+1}+\frac{1/6}{n+3}\right)=$$

$$=\left(\frac{1/3}{1}-\frac{1/2}{2}+\frac{1/6}{4}\right)+\left(\frac{1/3}{2}-\frac{1/2}{3}+\frac{1/6}{5}\right)+\left(\frac{1/3}{3}-\frac{1/2}{4}+\frac{1/6}{6}\right)+\left(\frac{1/3}{4}-\frac{1/2}{5}+\frac{1/6}{7}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{1/3}{N-2}-\frac{1/2}{N-1}+\frac{1/6}{N+1}\right)+\left(\frac{1/3}{N-1}-\frac{1/2}{N}+\frac{1/6}{N+2}\right)+\left(\frac{1/3}{N}-\frac{1/2}{N+1}+\frac{1/6}{N+3}\right)=$$

$$=\frac{1/3}{1}-\frac{1/6}{2}-\frac{1/6}{3}-\frac{1/3}{N+1}+\frac{1/6}{N+2}+\frac{1/6}{N+3}=\frac{7}{36}-\frac{1/3}{N+1}+\frac{1/6}{N+2}+\frac{1/6}{N+3} ,$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $7/36$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $7/36$.

257. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n} .$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że

$$\frac{1}{n^2+4n}=\frac{1}{n(n+4)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+4} .$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $n(n+4)$ otrzymujemy

$$1=A(n+4)+Bn .$$

Dla $n=0$ otrzymujemy $A=1/4$, natomiast przyjęcie $n=-4$ daje $B=-1/4$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2+4n}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+4}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{N-4}-\frac{1}{N}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{N-3}-\frac{1}{N+1}\right)+\left(\frac{1}{N-2}-\frac{1}{N+2}\right)+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N+3}\right)+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+4}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}-\frac{1}{N+3}-\frac{1}{N+4}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{12+6+4+3}{12}=\frac{1}{4}\cdot\frac{25}{12}=\frac{25}{48}.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $25/48$.

258. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)\cdot(5n+3)}.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że

$$\frac{1}{(5n-2)\cdot(5n+3)}=\frac{A}{5n-2}+\frac{B}{5n+3}.$$

Po wymnożeniu powyższej równości stronami przez $(5n-2)\cdot(5n+3)$ otrzymujemy

$$1=A(5n+3)+B(5n-2). \qquad (*)$$

Dla $n=2/5$ otrzymujemy $A=1/5$, natomiast przyjęcie $n=-3/5$ daje $B=-1/5$.
Inny sposób: porównując w równaniu (*) współczynniki przy n oraz wyrazy wolne dostajemy układ równań i go rozwiązujemy.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(5n-2)\cdot(5n+3)}=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{5n-2}-\frac{1}{5n+3}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{18}\right)+\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{23}\right)+\left(\frac{1}{23}-\frac{1}{28}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\frac{1}{5N-12}-\frac{1}{5N-7}\right)+\left(\frac{1}{5N-7}-\frac{1}{5N-2}\right)+\left(\frac{1}{5N-2}-\frac{1}{5N+3}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5N+3}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $1/15$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $1/15$.

Uwaga: Wydawać by się mogło, że w mianowniku wyrażenia definiującego wyraz ogólny szeregu mogą być niemal dowolne dwa czynniki liniowe i zadanie będzie się rozwiązywało podobnie. Nic bardziej mylnego. W zadaniu kluczowe jest to, że ułamki o mianownikach postaci $5n-2$ upraszczają się z ułamkami o mianownikach postaci $5n+3$.

259. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)}+(n+1)\cdot\sqrt{n\cdot(n+1)}}\,.$$

Rozwiązanie:

Zadanie wygląda na beznadziejnie[11] trudne. Mimo to nie poddawajmy się, tylko jakoś przekształćmy wyrazy szeregu.

Zróbmy to, co się da, a więc wyciągnijmy w mianowniku czynnik przed nawias, a następnie zauważmy, że w mianowniku występuje suma pierwiastków, którą dzięki wzorowi na różnicę kwadratów możemy przehandlować na różnicę pierwiastków na poziomie licznika:

$$\frac{1}{n\cdot\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)}+(n+1)\cdot\sqrt{n\cdot(n+1)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}\cdot\sqrt{n\cdot(n+2)}+\sqrt{(n+1)^2}\cdot\sqrt{n\cdot(n+1)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}\cdot\left(\sqrt{n\cdot(n+2)}+\sqrt{(n+1)^2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}\cdot\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+2n+1}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{n^2+2n+1}-\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}=\frac{\sqrt{(n+1)^2}-\sqrt{n\cdot(n+2)}}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{(n+1)^2}}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}-\frac{\sqrt{n\cdot(n+2)}}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}=\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\,.$$

Dzięki powyższej równości przekształcamy N-tą sumę częściową danego szeregu:

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\cdot\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)}+(n+1)\cdot\sqrt{n\cdot(n+1)}}=\sum_{n=1}^{N}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\right)=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{2}{1}}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)+\left(\sqrt{\frac{4}{3}}-\sqrt{\frac{5}{4}}\right)+\left(\sqrt{\frac{5}{4}}-\sqrt{\frac{6}{5}}\right)+\left(\sqrt{\frac{6}{5}}-\sqrt{\frac{7}{6}}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\sqrt{\frac{N-1}{N-2}}-\sqrt{\frac{N}{N-1}}\right)+\left(\sqrt{\frac{N}{N-1}}-\sqrt{\frac{N+1}{N}}\right)+\left(\sqrt{\frac{N+1}{N}}-\sqrt{\frac{N+2}{N+1}}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{1}}-\sqrt{\frac{N+2}{N+1}}=\sqrt{2}-\sqrt{\frac{N+2}{N+1}}\,,$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $\sqrt{2}-1$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $\sqrt{2}-1$.

[11] Trzeba jednak wierzyć, że w południowoamerykańskich telenowelach oraz w zadaniach z analizy nawet z beznadziejnego położenia można dzięki niewiarygodnym zbiegom okoliczności dojść do szczęśliwego zakończenia.