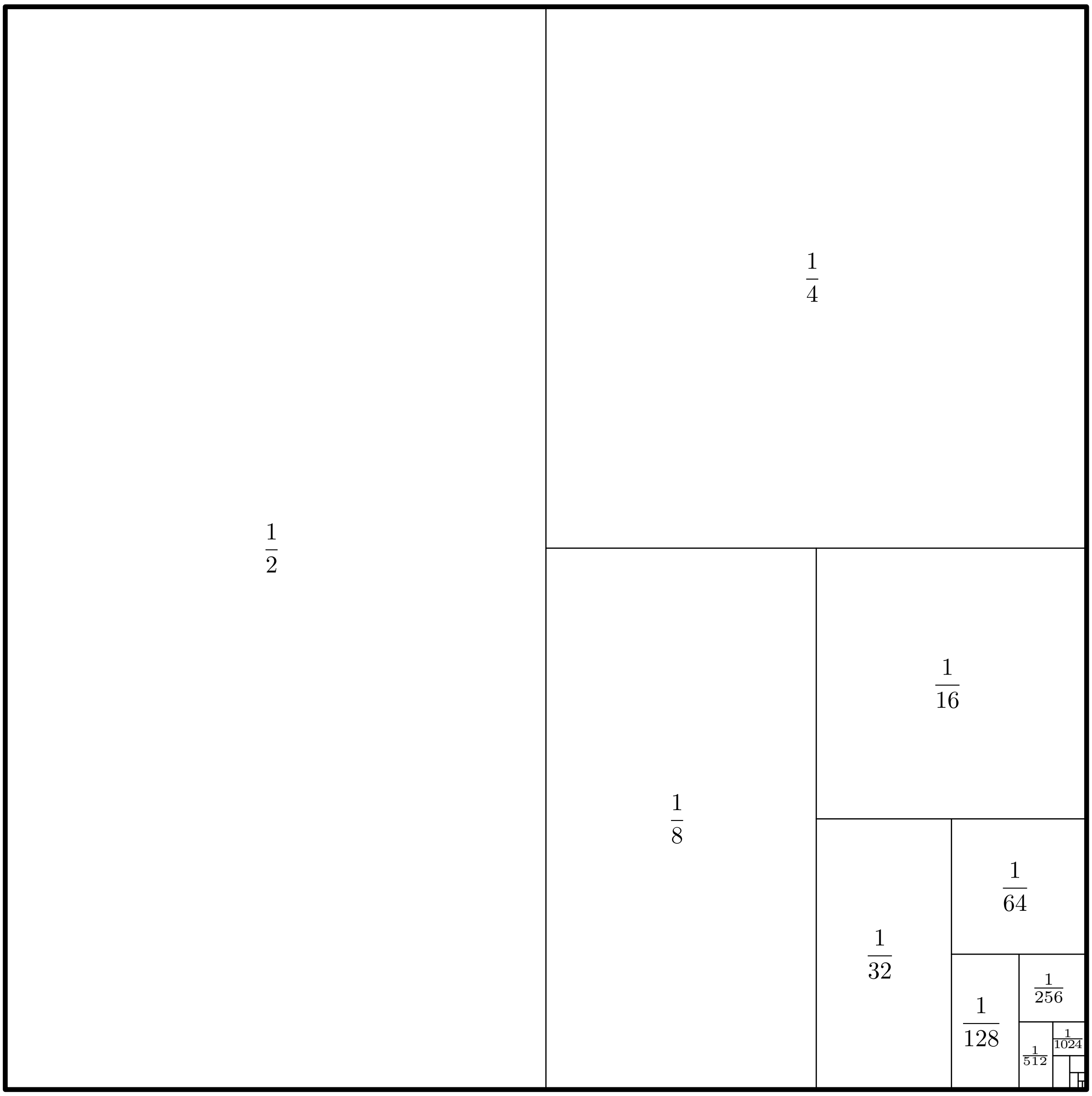
Szeregi liczbowe.

Rozważmy kwadrat o boku 1, a więc także[1] o polu 1. Podzielmy go na dwa prostokąty o polu 1/2 każdy. Jeden z tych prostokątów podzielmy na dwa kwadraty o polu 1/4. Jeden z tych kwadratów podzielmy na dwa prostokąty... I tak dalej (rys. 1).



rys. 1

[1] Tu jest tylko koincydencja "gołych" liczb. Pole kwadratu nie jest równe jego bokowi, gdyż pole ma jedną jednostkę pola, a bok jedną jednostkę długości. Podobnie zresztą kwadrat o boku 4 ma obwód 16 i pole też 16, ale nie można twierdzić, że jego pole jest równe obwodowi. Podobnie jak nie twierdzimy, że temperatura jest równa czasowi, gdy o godzinie siódmej widzimy na termometrze 7°C.

W rezultacie kwadrat zostanie podzielony[2] na nieskończenie wiele prostokątów.

Zdrowy rozsądek[3] podpowiada nam, że przy podziale figury na części suma pól figur podziału powinna być równa polu figury dzielonej.

Patrząc na rysunek 1 chciałoby się napisać, że

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+\frac{1}{1024}+\ldots=1\,.$$

No tak, tylko czym miałaby być suma nieskończenie wielu składników?

W praktyce moglibyśmy wysumować skończenie wiele, ale bardzo dużo początkowych składników tej sumy i mieć nadzieję, że pominięcie dalekich składników nie ma istotnego wpływu na otrzymany wynik. A bardziej precyzyjnie, możemy rozważać skończone sumy i zainteresować się granicą ciągu takich coraz dłuższych sum. W naszym przypadku suma n początkowych składników daje się zapisać prostym wzorem[4]:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}\,.$$

Dla dużych n prawa strona jest bliska 1, co możemy ściśle zapisać w postaci

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1\,.$$

* * * * * * * * * * * * *

* * * * *

To prowadzi do następującej procedury. Załóżmy, że chcemy zrozumieć sumę nieskończenie wielu składników[5]

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+\ldots$$

---

[2]W geometrii dzielenie figur może być rozumiane na dwa sposoby. Pierwszy sposób to formalistyczne podejście teoriomnogościowe, gdzie figurę-zbiór dzielimy na rozłączne podzbiory. O tym w tej chwili nie mówimy. Interesuje nas drugi sposób, gdzie dzielimy "pole", czyli nie przejmujemy się tym, że linia podziału jest częścią obydwu figur podziału. To ma aspekt bardziej praktyczny, gdzie nożyczkami cięlibyśmy papierową figurę na części. W rozważanym podziale kwadratu na nieskończenie wiele prostokątów nie przejmujemy się też tym, że prawy dolny wierzchołek wyjściowego kwadratu nie będzie należał do żadnego prostokąta podziału.

[3]W przypadku podziału na skończenie wiele figur to nie tyle rozsądek, co odpowiednie twierdzenia geometryczne. Rozsądek natomiast mówi nam, że również przy podziale na nieskończenie wiele figur pole całości powinno być sumą pól kawałków.

[4]Nie trzeba nawet stosować wzoru na sumę postępu geometrycznego — wystarczy spojrzeć na rysunek 1 i zobaczyć, że sumie pól początkowych prostokątów brakuje do jedynki tyle, ile wynosi pole najmniejszego z tych prostokątów.

[5]W rozważanym wyżej przykładzie $a_n=\frac{1}{2^n}$.

Rozważamy ciąg sum częściowych $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ określonych wzorem[6]

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\ldots+a_n\,.$$

Jeżeli ciąg $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, to jego granicę uznamy za wartość rozważanej sumy nieskończenie wielu składników:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+\ldots=\lim_{n\to\infty}S_n\,.$$

*   * * *   * * * * *   * * *   *
*   * * *   *

Po przedstawieniu tych wstępnych motywacji przejdźmy do bardziej systematycznych i formalnych definicji.

Nieskończoną sumę[7] $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, gdzie a_n są liczbami rzeczywistymi, będziemy nazywać **szeregiem liczbowym.** A dokładniej, mówiąc "szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$" mamy na myśli ciąg liczbowy sum częściowych $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\ldots+a_n\,.$$

Szereg liczbowy jest więc niczym innym jak ciągiem liczbowym podanym w taki sposób, aby wyrazy tego ciągu były narastającymi sumami tych samych składników:

$$a_1,\qquad a_1+a_2,\qquad a_1+a_2+a_3,\qquad a_1+a_2+a_3+a_4,\qquad a_1+a_2+a_3+a_4+a_5,\qquad \ldots$$

Wszelkie atrybuty ciągu (S_n) związane ze zbieżnością przypiszemy szeregowi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, zwracając jednak uwagę na pewne drobne niuanse terminologiczne:

---

[6]Jest tu pewna niedogodność w oznaczeniach. Jeśli jesteśmy przyzwyczajeni, że literka n numeruje nam zarówno składniki nieskończonej sumy jak i wyrazy ciągu sum częściowych, to dla zapisania skończonej sumy musimy użyć innej literki (tutaj: k) do numerowania składników. Inne wyjście, również dalekie od ideału, to utrzymać literkę n do numerowania składników, a do numerowania sum częściowych użyć innej literki, np. N. Wówczas pojawią się napisy:

$$(S_N)_{N\in\mathbb{N}}\,,\qquad S_N=\sum_{n=1}^{N}a_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_N\qquad \text{oraz}\qquad \lim_{N\to\infty}S_N\,.$$

[7]Przez słowo "suma" możemy rozumieć zarówno napis (składniki ze znakami "+" między nimi lub sumowanie zapisane z użyciem znaku "Σ") jak i liczbową wartość wykonanego dodawania. Jak się za chwilę przekonamy, także w stosunku do zapisu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ będziemy stosować taką podwójną terminologię.

• Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazwiemy **zbieżnym**, jeśli **zbieżny** jest ciąg (S_n).

• Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazwiemy **rozbieżnym**, jeśli **rozbieżny** jest ciąg (S_n).

• **Granicę**[8] ciągu (S_n) nazwiemy **sumą** szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

• **Sumę** szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oznaczymy[9] przez $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

• W przypadku $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ (lub $-\infty$) mówimy, że szereg jest **rozbieżny**, podobnie jak o ciągu sum częściowych powiemy, że jest **rozbieżny**.

• W przypadku $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = g \in \mathbb{R}$ mówimy, że ciąg (S_n) **jest zbieżny do** g, ale powiemy, że **suma szeregu** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **jest równa** g.

Nie mówimy, że szereg jest zbieżny do g !!!

• Chociaż szereg utożsamiamy z ciągiem jego sum częściowych, to słowo **wyraz** ma różne znaczenie w zależności od kontekstu. **Wyrazami szeregu** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ są liczby a_n, natomiast **wyrazami ciągu jego sum częściowych** są liczby S_n.

Ciągi i szeregi to te same obiekty. Szereg jest ciągiem swoich sum częściowych. Ale też każdy ciąg liczbowy jest ciągiem sum częściowych pewnego szeregu. Zadajmy bowiem dowolnie ciąg (S_n). Wówczas jest on ciągiem sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie

$$a_1 = S_1 \qquad \text{oraz} \qquad a_n = S_n - S_{n-1} \qquad \text{dla} \qquad n \geqslant 2\,.$$

Można więc pomyśleć, że w teorii szeregów liczbowych nie ma nic nowego ponad to, co znamy z teorii ciągów. Nic bardziej mylnego. Chociaż nadal mówimy o tym samym zbiorze obiektów i interesuje nas ta sama główna własność (zbieżność), to okazuje się, że zadając prostym wzorem ciąg, bardzo często dostajemy ciąg zbieżny, a jak zbieżny, to na ogół wiadomo, do jakiej granicy. Z szeregami jest inaczej. Dla szeregu, którego wyrazy są zadane prostym wzorem, częstokroć łatwo wnioskujemy zbieżność, ale wyliczenie sumy jest niemożliwością.

Dlatego naszą ambicją na ogół nie będzie wyliczenie sumy szeregu, ale ustalenie, czy szereg w ogóle jest zbieżny. Jednak to czeka nas dopiero w drugim semestrze. Teraz zapoznamy się jedynie ze skromnym wstępem do teorii szeregów i prostymi przykładami.

[8] Także granicę niewłaściwą $\pm\infty$.

[9] Tak więc sam szereg (jako ciąg sum częściowych) oznaczamy tak samo jak jego sumę (liczbę rzeczywistą lub $\pm\infty$). Nie powinno to jednak prowadzić do nieporozumień, bo z kontekstu na ogół jest jasne, o które znaczenie nam chodzi. Niektórzy autorzy stosują zapis bez granic sumowania dla oznaczenia szeregu (jako ciągu sum częściowych), a granice sumowania podają tylko wtedy, gdy chodzi o sumę szeregu.

Podstawowe kryteria zbieżności:

- **Warunek konieczny zbieżności szeregu:**

Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to ciag (a_n) wyrazów tego szeregu jest zbieżny do zera: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Stąd otrzymujemy[10] następujące kryterium:

$$\text{Jeżeli } a_n \not\to 0, \text{ to szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest rozbieżny.}$$

Dowód powyższego kryterium wygląda następująco:
Niech szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie zbieżny, a jego suma niech będzie równa S. Wówczas[11]:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0\,.$$

- **Dodawanie szeregów:**

$$\text{Jeżeli szeregi } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ oraz } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ są zbieżne,}$$
$$\text{to szereg } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{ też jest zbieżny.}$$

Powyższe wynika z twierdzenia o sumie granic dla ciągów. Ponadto jeśli powyższe szeregi są zbieżne, to zachodzi równość[12]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,.$$

Jeżeli jeden z szeregów $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, a drugi rozbieżny, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ jest rozbieżny.

- **Mnożenie szeregu przez stałą:**

$$\text{Jeżeli } c \text{ jest liczbą rzeczywistą różną od zera,}$$
$$\text{to szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy,}$$
$$\text{gdy zbieżny jest szereg} \sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n).$$

---

[10] Jako transpozycję implikacji.

[11] Jak zwykle S_n jest n-tą sumą częściową rozważanego szeregu, a ponadto przyjmujemy $S_0 = 0$.

[12] Niestety nie daje się w krótki i zgrabny sposób streścić językiem polskim tej równości. W przypadku ciągów możemy powiedzieć, że granica sumy jest sumą granic. W przypadku szeregów analogiczne sformułowanie brzmiałoby: Suma sum jest sumą sum.
A naprawdę znaczyłoby: **Suma** *sum* jest *sumą* **sum**,
gdzie **suma** odnosi się do sumowania szeregu, a *suma* do dodawania dwóch liczb.

Jeśli powyższy szereg jest zbieżny, to zachodzi równość

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c\cdot a_n)=c\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,.$$

• **Zmiana lub pominięcie skończenie wielu wyrazów:**

Zmiana lub pominięcie skończenie wielu wyrazów szeregu nie wpływa na jego zbieżność. Ale na ogół ma wpływ na sumę szeregu, jeśli jest on zbieżny.

• **Szereg geometryczny:**

Sumę szeregu geometrycznego wyliczamy dzięki temu, że jesteśmy w stanie wyliczyć sumy częściowe:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_1q^{n-1}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_1q^{n-1}=\lim_{N\to\infty}a_1\frac{1-q^N}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}\,, \qquad (\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\spadesuit)$$

o ile $|q|<1$.

Niezerowy[13] szereg geometryczny jest rozbieżny przy $|q|\geqslant 1$, a zbieżny (i ma podaną wyżej sumę) dla $|q|<1$.

Zadanie dla uważnych:

Znajdź błąd we wzorach $(\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\spadesuit)$ i napraw go.

• **Szereg harmoniczny:**

Bardzo ważnym przykładem szeregu jest szereg harmoniczny, czyli szereg odwrotności wszystkich liczb naturalnych:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots$$

Szereg ten ma wyrazy dodatnie, a więc ciąg jego sum częściowych jest rosnący. Ma więc granicę skończoną albo granicę niewłaściwą równą $+\infty$. Jest więc sens mówić o sumie szeregu harmonicznego, a pytanie o jego zbieżność jest pytaniem o to, czy ta suma jest skończona.

Nie wchodzi w rachubę wyliczenie sum częściowych i przejście do granicy, gdyż nie ma prostych wzorów na sumę odwrotności kolejnych liczb naturalnych. Ponieważ interesuje nas jedynie, czy suma szeregu harmonicznego jest duża (nieskończona) czy mała (skończona), postaramy się oszacować jego sumę. W tym celu podzielimy jego wyrazy na bloki[14], które okażą się zawierać składniki zbliżonej wielkości. Podziału dokonamy w miejscach, w których występują odwrotności potęg dwójki[15]. Poszczególne bloki zapiszemy w kolejnych wierszach. Wyrazy szeregu ułożą się następująco:

[13] Czyli taki, że $q\neq 0$ oraz $a_1\neq 0$.

[14] Zwane czasami blokami diadycznymi.

[15] Jest przy tym w dużej mierze obojętne, czy odwrotności potęg dwójki znajdą się na początku, czy na końcu bloków.

$$
\begin{array}{c}
1\\
\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\\
\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\\
\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}\\
\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\ldots+\frac{1}{28}+\frac{1}{29}+\frac{1}{30}+\frac{1}{31}\\
\frac{1}{32}+\frac{1}{33}+\frac{1}{34}+\frac{1}{35}+\ldots+\frac{1}{60}+\frac{1}{61}+\frac{1}{62}+\frac{1}{63}\\
\frac{1}{64}+\frac{1}{65}+\frac{1}{66}+\frac{1}{67}+\ldots+\frac{1}{124}+\frac{1}{125}+\frac{1}{126}+\frac{1}{127}
\end{array}
$$

W każdym wierszu występują składniki, które są zbliżonej wielkości – iloraz największego do najmniejszego jest mniejszy od 2. Możemy więc oszacować sumę wiersza mnożąc liczbę składników przez ich wspólne oszacowanie. Ponieważ w każdym wierszu liczba składników jest potęgą dwójki, same składniki będziemy szacować przez odwrotności potęg dwójki. Oszacowania dokonamy z obu stron (od dołu i od góry), chociaż potrzebne okaże się tylko oszacowanie z jednej strony – jednak, aby wiedzieć, z której, musielibyśmy najpierw zgadnąć, czy suma szeregu harmonicznego jest skończona czy nie.

Szacowania wyglądają następująco:

$$
\begin{array}{rcccl}
1 & = & 1 & = & 1\\
\frac{1}{2}=\frac{2}{4} & < & \frac{1}{2}+\frac{1}{3} & < & \frac{2}{2}=1\\
\frac{1}{2}=\frac{4}{8} & < & \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7} & < & \frac{4}{4}=1\\
\frac{1}{2}=\frac{8}{16} & < & \frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15} & < & \frac{8}{8}=1\\
\frac{1}{2}=\frac{16}{32} & < & \frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\ldots+\frac{1}{28}+\frac{1}{29}+\frac{1}{30}+\frac{1}{31} & < & \frac{16}{16}=1\\
\frac{1}{2}=\frac{32}{64} & < & \frac{1}{32}+\frac{1}{33}+\frac{1}{34}+\frac{1}{35}+\ldots+\frac{1}{60}+\frac{1}{61}+\frac{1}{62}+\frac{1}{63} & < & \frac{32}{32}=1\\
\frac{1}{2}=\frac{64}{128} & < & \frac{1}{64}+\frac{1}{65}+\frac{1}{66}+\frac{1}{67}+\ldots+\frac{1}{124}+\frac{1}{125}+\frac{1}{126}+\frac{1}{127} & < & \frac{64}{64}=1
\end{array}
$$

Widzimy, że w każdym wierszu suma wyrazów jest pomiędzy $1/2$ a 1. Ponieważ wierszy jest nieskończenie wiele, a każdy zawiera składniki o sumie większej od $1/2$, suma wszystkich składnków w nich zawartych jest nieskończona. Wykazaliśmy więc, że:

Szereg harmoniczny jest rozbieżny.

Jest to bardzo ważny przykład, gdyż otrzymaliśmy szereg, który jest rozbieżny pomimo że jego wyrazy dążą do zera.

Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Postępując jak w przypadku szeregu harmonicznego otrzymujemy następujące oszacowania:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & = & 1 & = & 1 \\
\frac{1}{8}=\frac{2}{16} & < & \frac{1}{4}+\frac{1}{9} & < & \frac{2}{2}=\frac{1}{2} \\
\frac{1}{16}=\frac{4}{64} & < & \frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49} & < & \frac{4}{16}=\frac{1}{4} \\
\frac{1}{32}=\frac{8}{16^2} & < & \frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{10^2}+\ldots+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{14^2}+\frac{1}{15^2} & < & \frac{8}{8^2}=\frac{1}{8} \\
\frac{1}{64}=\frac{16}{32^2} & < & \frac{1}{16^2}+\frac{1}{17^2}+\frac{1}{18^2}+\ldots+\frac{1}{29^2}+\frac{1}{30^2}+\frac{1}{31^2} & < & \frac{16}{16^2}=\frac{1}{16} \\
\frac{1}{128}=\frac{32}{64^2} & < & \frac{1}{32^2}+\frac{1}{33^2}+\frac{1}{34^2}+\ldots+\frac{1}{61^2}+\frac{1}{62^2}+\frac{1}{63^2} & < & \frac{32}{32^2}=\frac{1}{32} \\
\frac{1}{256}=\frac{64}{128^2} & < & \frac{1}{64^2}+\frac{1}{65^2}+\frac{1}{66^2}+\ldots+\frac{1}{125^2}+\frac{1}{126^2}+\frac{1}{127^2} & < & \frac{64}{64^2}=\frac{1}{64}
\end{array}$$

Przydadzą nam się tylko oszacowania od góry, które tworzą szereg[16] geometryczny $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ o sumie 2. Stąd wniosek, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, a jego suma jest mniejsza od 2.

Można udowodnić (zrobimy to w drugim semestrze), że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

Wartość sumy tego szeregu skutecznie zniechęca do szukania prostego i elementarnego jej wyliczenia. Widzimy więc, że szereg zbieżny o stosunkowo prostym wzorze na jego wyrazy może mieć skomplikowany i trudny do uzyskania wzór na jego sumę. Albo wręcz jego suma może nie być wyrażalna żadnym wzorem – gdybyśmy rozwinęli matematykę unikając wprowadzenia[17] liczby π, suma szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ nie wyrażałaby się żadnym wzorem.

[16] Dolna granica sumowania szeregu nie musi być równa 1.
[17] Czyli oznaczenia ustalonym symbolem.

Szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.

W podobny sposób, jak to zrobiliśmy w przypadku szeregu harmonicznego oraz szeregu odwrotności kwadratów liczb naturalnych, można wykazać, że

$$\text{Szereg } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \text{ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy } p>1.$$

Te szeregi są wzorcowymi szeregami, do których będziemy przyrównywać wiele innych szeregów.

Kryterium porównawcze.

Kryterium porównawcze dotyczy szeregow o wyrazach nieujemnych:

Niech dane będą takie szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, że dla każdej[18] liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$0\leqslant a_n\leqslant b_n\,.$$

Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ jest rozbieżny.

Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny.

Ponieważ w przypadku szeregów o wyrazach nieujemnych suma szeregu ma zawsze sens, warunek zbieżności takiego szeregu możemy zapisać porównując jego sumę z nieskończonością. W tej konwencji tezę kryterium porównawczego można zapisać symbolicznie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\infty \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n<\infty \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$$

Kryterium porównawcze można łatwo zapamiętać w oparciu o zdrowy rozsądek:

Dane są dwa szeregi: mniejszy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ i większy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$. Jeśli mniejszy szereg ma dużą (nieskończoną) sumę, to większy tym bardziej ma dużą (nieskończoną) sumę. Jeśli większy szereg ma małą (skończoną) sumę, to mniejszy tym bardziej ma małą (skończoną) sumę.

[18] Ponieważ zbieżność szeregu nie zależy od majstrowania przy skończenie wielu wyrazach, tak naprawdę nierówności te muszą zachodzić dla prawie wszystkich (czyli wszystkich poza skończoną ilością) liczb naturalnych n.

251. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^7+4n^4-1}}{5n^5-4n^4+1}\,.$$

Rozwiązanie:

Zastosujemy kryterium porównawcze, szacując szereg od góry (gdyż wyrazy szeregu są rzędu wielkości $1/n^{3/2}$ i dlatego podejrzewamy, że szereg jest zbieżny). Otrzymujemy
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^7+4n^4-1}}{5n^5-4n^4+1} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^7+4n^7-0}}{5n^5-4n^5+0} = 3\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty\,,$$
bo $3/2>1$.

Odpowiedź: Dany szereg jest zbieżny.

252. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^8+4n^4-1}}{5n^5-4n^4+1}\,.$$

Rozwiązanie:

Zastosujemy kryterium porównawcze, szacując szereg od dołu (gdyż wyrazy szeregu są rzędu wielkości $1/n$ i dlatego podejrzewamy, że szereg jest rozbieżny).

Otrzymujemy
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^8+4n^4-1}}{5n^5-4n^4+1} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^8+0-n^8}}{5n^5-0+n^5} = \frac{1}{3}\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty\,,$$
gdyż ostatni szereg to szereg harmoniczny.

Odpowiedź: Dany szereg jest rozbieżny.

Błąd we wzorach (♣♢♡♠).

Wzór na sumę postępu geometrycznego
$$\sum_{n=1}^{N} a_1 q^{n-1} = a_1 \frac{1-q^N}{1-q}$$
jest prawdziwy przy założeniu, że postęp nie jest stały, czyli $q\neq 1$.

Dla $q=1$ wzór ten wygląda następująco
$$\sum_{n=1}^{N} a_1 = N\cdot a_1\,,$$
co w przypadku $a_1\neq 0$ nie ma granicy skończonej przy $N\to\infty$.