Kresy zbiorów.

Zbiór[1] $Z\subset\mathbb{R}$ nazywamy **ograniczonym z góry**, jeżeli

$$\underset{M\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x\in Z}{\forall}\ x\leqslant M\,.$$

Ograniczeniem górnym zbioru $Z\subset\mathbb{R}$ nazywamy każdą taką liczbę rzeczywistą M, że

$$\underset{x\in Z}{\forall}\ x\leqslant M\,.$$

Zbiór $Z\subset\mathbb{R}$ nazywamy **ograniczonym z dołu**, jeżeli

$$\underset{N\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x\in Z}{\forall}\ x\geqslant N\,.$$

Ograniczeniem dolnym zbioru $Z\subset\mathbb{R}$ nazywamy każdą taką liczbę rzeczywistą N, że

$$\underset{x\in Z}{\forall}\ x\geqslant N\,.$$

Zbiór $Z\subset\mathbb{R}$ nazywamy **ograniczonym**, jeżeli jest jednocześnie ograniczony z góry i z dołu. Warunek równoważny ograniczoności zbioru Z wygląda następująco:

$$\underset{M\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{x\in Z}{\forall}\ |x|\leqslant M\,.$$

*   * * *   * * * * *   * * *   *
*   * * *   *

Niech $Z\subset\mathbb{R}$ będzie niepustym zbiorem ograniczonym z góry. Rozważmy zbiory:

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}:\ \underset{y\in Z}{\exists}\ y>x\right\}$$

oraz

$$B=\left\{x\in\mathbb{R}:\ \underset{y\in Z}{\forall}\ y\leqslant x\right\}.$$

Innymi słowy: zbiór A to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które **nie są** górnym ograniczeniem zbioru Z, natomiast B jest zbiorem wszystkich górnych ograniczeń zbioru Z. Zbiory A i B stanowią przekrój Dedekinda[2] liczb rzeczywistych.

---

[1] Są różne konwencje dotyczące oznaczania podzbiorów. Ja przyjmuję, że "$\subset$" oznacza zawieranie i dopuszcza równość zbiorów, a więc w szczególności $Z\subset Z$.

[2] Przypominam, że zbiory A i B stanowią przekrój Dedekinda zbioru liczb rzeczywistych, jeżeli:
- A i B są niepuste,
- A i B są rozłączne,
- $A\cup B=\mathbb{R}$,
- $\underset{a\in A}{\forall}\ \underset{b\in B}{\forall}\ a<b$.

Z aksjomatu ciągłości wynika, że zbiór A ma element największy albo zbiór B ma element najmniejszy. Okazuje się, że zachodzi ten drugi przypadek, czyli:

Wśród ograniczeń górnych

niepustego zbioru ograniczonego z góry

istnieje ograniczenie najmniejsze.

Najmniejsze ograniczenie górne zbioru Z nazywamy kresem górnym zbioru Z i oznaczamy[3] $\sup Z$.

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Niech $Z\subset\mathbb{R}$ będzie niepustym zbiorem ograniczonym z dołu. Rozważmy zbiory:

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}:\ \underset{y\in Z}{\forall}\ y\geqslant x\right\}$$

oraz

$$B=\left\{x\in\mathbb{R}:\ \underset{y\in Z}{\exists}\ y<x\right\}.$$

Innymi słowy: zbiór A to zbiór wszystkich dolnych ograniczeń zbioru Z, natomiast zbiór B składa się z liczb, które **nie są** dolnym ograniczeniem zbioru Z. Zbiory A i B stanowią przekrój Dedekinda liczb rzeczywistych.

Z aksjomatu ciągłości wynika, że zbiór A ma element największy albo zbiór B ma element najmniejszy. Okazuje się, że zachodzi ten pierwszy przypadek, czyli:

Wśród ograniczeń dolnych

niepustego zbioru ograniczonego z dołu

istnieje ograniczenie największe.

Największe ograniczenie dolne zbioru Z nazywamy kresem dolnym zbioru Z i oznaczamy[4] $\inf Z$.

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *

Do tego należy dodać następujące konwencje:
- Jeżeli zbiór Z jest nieograniczony z góry, to $\sup Z=+\infty$.
- Jeżeli zbiór Z jest nieograniczony z dołu, to $\inf Z=-\infty$.
- [5] $\sup\emptyset=-\infty$ oraz $\inf\emptyset=+\infty$.

[3]Czytamy: *supremum.*

[4]Czytamy: *infimum.*

[5]To się może wydawać dziwne, więc napiszmy to wyraźnie: kres górny zbioru pustego to **minus** nieskończoność, a kres dolny zbioru pustego to **plus** nieskończoność.

Widzimy więc, że dla każdego zbioru $Z \subset \mathbb{R}$ napisy $\inf Z$ oraz $\sup Z$ mają sens. Mogą one oznaczać liczbę rzeczywistą lub $\pm\infty$. To zupełnie inna sytuacja niż w przypadku napisu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, który często nie ma żadnego sensu, jak np. dla $a_n=(-1)^n$. To może się przydać do definiowania wielkości matematycznych bez konieczności przeprowadzania dowodów w momencie formułowania definicji. Na przykład liczbę e zdefiniowaliśmy jako

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Ale aby w ogóle tę definicję sformułować (czyli wiedzieć, że jest sensowna), musieliśmy najpierw udowodnić, że powyższa granica istnieje. Tymczasem pisząc

$$e=\sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n :\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

mamy od razu poprawną definicję. Nie wiemy wprawdzie, czy tak zdefiniowane e jest liczbą czy nieskończonością, ale sama definicja poprawnie coś definiuje. Dopiero dalsze rozważania pokazują nam, czym jest owo e. Skoro ciąg

$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

okazuje się być rosnący i ograniczony, to jest zbieżny, a jego granica jest jednocześnie kresem górnym zbioru jego wyrazów.

Inne zastosowanie kresów do sprawnego definiowania rozmaitych wielkości poznamy w drugim semestrze przy okazji całki oznaczonej. Aby poczuć przedsmak tego, co wówczas nastąpi, zastanówmy się, jak zdefiniować pole obszaru na płaszczyźnie[6]. Załóżmy przy tym, że świetnie rozumiemy czym są pola wielokątów. Pierwszy pomysł polega na coraz lepszym przybliżaniu obszaru wielokątami i zdefiniowaniu pola jako granicy pól tych wielokątów. Ale po pierwsze nie wiemy, czy taka granica istnieje, a po drugie wybór ciągu wielokątów przybliżających figurę może mieć wpływ na uzyskane graniczne pole. Tymczasem trudności te znikają, gdy zdefiniujemy pole figury jako kres górny pól wielokątów w niej zawartych, ewentualnie jako kres dolny pól wielokątów ją zawierających.

$* \quad * * * \quad * * * * * \quad * * * \quad *$
$* \quad * * * \quad *$

Nie będziemy za bardzo zgłębiać teoretycznych i technicznych aspektów pojęcia kresów. Postarajmy się za to nabrać umiejętności wyznacznia kresów konkretnych zbiorów. Czasami wymagać to będzie jedynie zrozumienia jak wygląda zbiór, a czasami przeprowadzenia jakiegoś rozumowania.

Przyjrzyjmy się więc kilku różnorodnym przykładom.

176. Wyznaczyć kresy zbioru

$$Z=\left\{\sqrt{n^2+n}-n:\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

i określić, czy kresy należą do zbioru Z.

[6] Myślmy o obszarze ograniczonym pewną krzywą zamkniętą i powstrzymajmy się od zadawania kłoptoliwych pytań w stylu: A co to jest krzywa?

Rozwiązanie:

Zbiór Z jest zbiorem wyrazów pewnego ciągu liczbowego. Zbadajmy więc monotoniczność tego ciągu. W tym celu przekształcamy wzór na n-ty wyraz ciągu:

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1},$$

skąd wynika, że ciąg jest rosnący (bo licznik i mianownik są dodatnie, a wraz ze wzrostem n mianownik maleje). Zatem kresem dolnym jest pierwszy wyraz ciągu równy $\sqrt{2}-1$, który należy do zbioru Z, a kresem górnym jest granica ciągu równa $1/2$, która nie należy do zbioru Z.

177. Wyznaczyć kresy zbioru

$$Z=\left\{\sqrt{n^2+n+1}-n:\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

i określić, czy kresy należą do zbioru Z.

Rozwiązanie:

Zbiór Z jest zbiorem wyrazów pewnego ciągu liczbowego. Zbadajmy więc monotoniczność tego ciągu. W tym celu przekształcamy wzór na n-ty wyraz ciągu:

$$\sqrt{n^2+n+1}-n=\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}=\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1},$$

skąd nic nie wynika o monotoniczności ciągu, bo licznik i mianownik maleją wraz ze wzrostem n.

Zasosujmy więc wzór skróconego mnożenia tak, aby od pierwiastka odejmować wyrażenie dokładniej go przybliżające, a mianowicie $n+1/2$. Otrzymujemy:

$$\sqrt{n^2+n+1}-n=\sqrt{n^2+n+1}-\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{3/4}{\sqrt{n^2+n+1}+\left(n+\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{2},$$

skąd wynika, że ciąg jest malejący (bo licznik i mianownik są dodatnie, a wraz ze wzrostem n mianownik rośnie). Zatem kresem górnym jest pierwszy wyraz ciągu równy $\sqrt{3}-1$, który należy do zbioru Z, a kresem dolnym jest granica ciągu równa $1/2$, która nie należy do zbioru Z.

178. Wyznaczyć kresy zbioru

$$Z=\left\{\frac{mn}{m^2+n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}$$

i określić, czy kresy należą do zbioru Z.

Rozwiązanie:

Rozwiązanie zadania oprzemy na następujących spostrzeżeniach:

1° Wszystkie elementy zbioru Z są dodatnie.

2° Istnieje ciąg o wyrazach ze zbioru Z zbieżny do zera.
Dla dowodu tego spostrzeżenia wystarczy przyjąć $m=1$ w wyrażeniu

$$\frac{mn}{m^2+n^2}\,. \qquad (\clubsuit)$$

Otrzymamy wówczas

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}+n}=0\,.$$

3° Liczba $1/2$ jest elementem zbioru Z.
Aby to zobaczyć, wystaczy podstawić $m=1$ i $n=1$ w ($\clubsuit$).

4° Każdy element zbioru Z jest nie większy od $1/2$.
Istotnie, z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb m^2 i n^2 otrzymujemy

$$\sqrt{m^2\cdot n^2}\leqslant\frac{m^2+n^2}{2}\,,$$

co łatwo przekształcamy do postaci

$$\frac{mn}{m^2+n^2}\leqslant\frac{1}{2}\,.$$

Na podstawie spostrzeżeń **1°** i **2°** stwierdzamy, że $\inf Z=0$, a ze spostrzeżeń **3°** i **4°** wynika $\sup Z=1/2$.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy 0, a kres górny 1/2.

179. Wyznaczyć kresy zbioru

$$Z=\left\{\frac{m}{n}:\,m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 2n^2\leqslant m^2\leqslant 4n^2\right\}$$

i określić, czy kresy należą do zbioru Z.

Rozwiązanie:

Zbiór Z jest zbiorem wszystkich liczb wymiernych dodadnich, które mogą[7] być zapisane w postaci m/n z licznikiem i mianownikiem spełniającymi nierówności:

$$2n^2\leqslant m^2\leqslant 4n^2\,.$$

Przekształcenie powyższych nierówności prowadzi do

$$\sqrt{2}\leqslant\frac{m}{n}\leqslant 2\,,$$

skąd wynika, że

$$Z=\left[\sqrt{2},\,2\right]\cap\mathbb{Q}\,.$$

Ponieważ $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, nie należy ona do zbioru Z.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy $\sqrt{2}$ i nie należy do zbioru. Kres górny jest równy 2 i należy do zbioru.

[7]Mogłoby być tak, że jeden z zapisów liczby wymiernej spełnia podane nierówności, a inny nie. Tu jednak okaże się, że prawdziwość podanych nierówności nie zależy od m i n, a jedynie od wartości ilorazu m/n.