Ciągi – trochę teorii i dowodów.

Dziś uzupełnienie wiedzy teoretycznej o ciągach liczbowych.

Przykładowy dowód: granica sumy jest sumą granic.

Udowodnimy, że jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy g, a ciąg (b_n) jest zbieżny do granicy h, to ciąg (a_n+b_n) jest zbieżny do $g+h$.

Zakładamy:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ |a_n-g|<\varepsilon$$

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ |b_n-h|<\varepsilon$$

Chcemy udowodnić:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ |(a_n+b_n)-(g+h)|<\varepsilon$$

Pierwsza naiwna próba dowodu polega na bezmyślnym manipulowaniu nierównościami wyjętymi z kontekstu kwantyfikatorów, w którym są one osadzone.

A konkretnie: z nierówności

$$|a_n-g|<\varepsilon$$

oraz

$$|b_n-h|<\varepsilon$$

chcemy uzyskać oszacowanie wielkości

$$|(a_n+b_n)-(g+h)|\ .$$

Możemy przy tym korzystać z nierówności trójkąta: $|x+y|\leqslant|x|+|y|$. Najlepsze oszacowanie, jakie udaje się wykonać, to

$$|(a_n+b_n)-(g+h)|=|(a_n-g)+(b_n-h)|\leqslant|a_n-g|+|b_n-h|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon\,.$$

Widzimy, że wielkość tę udało nam się oszacować przez 2ε zamiast wymaganego w definicji ε. Z tego można się próbować wytłumaczyć, twierdząc, że 2ε może być uczynione dowolnie małym. To może dać **złudzenie przeprowadzonego dowodu.** Ale zignorowanie kwantyfikatorów i wykonanie manipulacji na nierównościach wyrwanych z kontekstu nie może doprowadzić do rozumowania, które dałoby się uznać za dowód.

Podstawowy problem polega na tym, że w rozważnych trzech definicjach występują zmienne związane nazywane tymi samymi literkami (ε, N, n), co mocno utrudnia prześledzenie zależności między nimi. Dlatego dopiszmy do tych literek znaczki, które formalnie niczego nie wnoszą, ale przypominają nam co pochodzi z której definicji i od czego zależy:

$$\underset{\varepsilon_1>0}{\forall}\ \underset{N_1(\varepsilon_1)}{\exists}\ \underset{n\geq N_1(\varepsilon_1)}{\forall}\ |a_n-g|<\varepsilon_1$$

$$\underset{\varepsilon_2>0}{\forall}\ \underset{N_2(\varepsilon_2)}{\exists}\ \underset{n\geq N_2(\varepsilon_2)}{\forall}\ |b_n-h|<\varepsilon_2$$

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall}\ |(a_n+b_n)-(g+h)|<\varepsilon$$

Na przykład $N_1(\varepsilon_1)$ oznacza N dobrane w pierwszej definicji do ε_1.

Tak więc zakładając

$$\underset{\varepsilon_1>0}{\forall}\ \underset{N_1(\varepsilon_1)}{\exists}\ \underset{n\geqslant N_1(\varepsilon_1)}{\forall}\ |a_n-g|<\varepsilon_1$$

$$\underset{\varepsilon_2>0}{\forall}\ \underset{N_2(\varepsilon_2)}{\exists}\ \underset{n\geqslant N_2(\varepsilon_2)}{\forall}\ |b_n-h|<\varepsilon_2$$

chcemy udowodnić

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ |(a_n+b_n)-(g+h)|<\varepsilon$$

W tym momencie szacowanie wielkości

$$|(a_n+b_n)-(g+h)|$$

przybiera postać

$$|(a_n+b_n)-(g+h)|=|(a_n-g)+(b_n-h)|\leqslant|a_n-g|+|b_n-h|<\varepsilon_1+\varepsilon_2\,.$$

Wymaga ono użycia nierówności

$$|a_n-g|<\varepsilon_1$$

oraz

$$|b_n-h|<\varepsilon_2\,,$$

które są spełnione odpowiednio dla $n\geqslant N_1(\varepsilon_1)$ oraz $n\geqslant N_2(\varepsilon_2)$. Aby uzyskać

$$|(a_n+b_n)-(g+h)|<\varepsilon$$

na podstawie

$$|(a_n+b_n)-(g+h)|<\varepsilon_1+\varepsilon_2$$

wystarczy przyjąć $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon/2$.

* * * * * * * * * * * * * *
* * * * *

Teraz możemy pozbierać te uwagi i zredagować dowód tego, że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ |(a_n+b_n)-(g+h)|<\varepsilon$$

Mamy dowieść:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ \text{coś tam}$$

Czyli schemat dowodu jest taki: dostajemy od kogoś ε. Do tego epsilona mamy dobrać takie N, aby dalej było dobrze, czyli aby dla każdego $n\geqslant N$ zachodziło **coś tam**. Tym **coś tam** jest nierówność

$$|(a_n+b_n)-(g+h)|<\varepsilon\,,$$

która wymaga

$$|a_n-g|<\varepsilon_1$$

oraz

$$|b_n-h|<\varepsilon_2\,,$$

a to z kolei wymaga $n\geqslant N_1(\varepsilon_1)$ oraz $n\geqslant N_2(\varepsilon_2)$ przy $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon/2$.

* * * * * * * * * * * * *
* * * * *

No to lecimy z dowodem wyczyszczonym z niepotrzebnych elementów:

Niech ε będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Dobieramy

$$N=\max\left(N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right).$$

Wówczas dla każdego $n\geqslant N$ mamy

$$n\geqslant N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\qquad\text{oraz}\qquad n\geqslant N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

skąd otrzymujemy odpowiednio

$$|a_n-g|<\frac{\varepsilon}{2}$$

oraz

$$|b_n-h|<\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Stąd

$$|(a_n+b_n)-(g+h)|=|(a_n-g)+(b_n-h)|\leqslant|a_n-g|+|b_n-h|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,.$$

To kończy dowód twierdzenia o sumie granic.

Przykładowy dowód: granica iloczynu jest iloczynem granic.

Udowodnimy, że jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy g, a ciąg (b_n) jest zbieżny do granicy h, to ciąg $(a_n b_n)$ jest zbieżny do gh.

Zakładając

$$\underset{\varepsilon_1>0}{\forall}\ \underset{N_1(\varepsilon_1)}{\exists}\ \underset{n\geqslant N_1(\varepsilon_1)}{\forall}\ |a_n-g|<\varepsilon_1$$

$$\underset{\varepsilon_2>0}{\forall}\ \underset{N_2(\varepsilon_2)}{\exists}\ \underset{n\geqslant N_2(\varepsilon_2)}{\forall}\ |b_n-h|<\varepsilon_2$$

chcemy udowodnić

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ |(a_n b_n)-(gh)|<\varepsilon$$

W zasadzie chciałoby się przepisać poprzedni dowód, ale nie widać od razu jak oszacować

$$|(a_n b_n)-(gh)|\ .$$

Sztuczka, jaką stosujemy dla oszacowania różnicy iloczynu, to wprowadzenie z plusem i z minusem ilocznynu zawierającego po jednym czynniku z każdego z odejmowanych iloczynów:

$$|a_nb_n-gh|=|a_nb_n-a_nh+a_nh-gh|\leqslant|a_nb_n-a_nh|+|a_nh-gh|=|a_n|\cdot|b_n-h|+|h|\cdot|a_n-g|=$$
$$=|a_n-g+g|\cdot|b_n-h|+|h|\cdot|a_n-g|\leqslant(|a_n-g|+|g|)\cdot|b_n-h|+|h|\cdot|a_n-g|\leqslant$$
$$\leqslant(1+|g|)\cdot\varepsilon_2+|h|\cdot\varepsilon_1<(|g|+1)\cdot\varepsilon_2+(|h|+1)\cdot\varepsilon_1\,,$$

o ile

$$|a_n-g|<1, \qquad |a_n-g|<\varepsilon_1 \qquad \text{oraz} \qquad |b_n-h|<\varepsilon_2\,.$$

Do tego potrzebujemy:

$$(|g|+1)\cdot\varepsilon_2+(|h|+1)\cdot\varepsilon_1\leqslant\varepsilon\,,$$

co wymaga na przykład

$$(|h|+1)\cdot\varepsilon_1\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

oraz

$$(|g|+1)\cdot\varepsilon_2\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\,,$$

czyli

$$\varepsilon_1\leqslant\frac{\varepsilon}{2\cdot(|h|+1)}$$

oraz

$$\varepsilon_2\leqslant\frac{\varepsilon}{2\cdot(|g|+1)}\,.$$

To prowadzi do następującego dowodu:

Niech ε będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Dobieramy

$$N=\max\left(N_1(1),\, N_1\left(\frac{\varepsilon}{2\cdot(|h|+1)}\right),\, N_2\left(\frac{\varepsilon}{2\cdot(|g|+1)}\right)\right).$$

Wówczas dla każdego $n\geqslant N$ mamy

$$n\geqslant N_1(1),\qquad n\geqslant N_1\left(\frac{\varepsilon}{2\cdot(|h|+1)}\right)\qquad \text{oraz}\qquad n\geqslant N_2\left(\frac{\varepsilon}{2\cdot(|g|+1)}\right),$$

skąd otrzymujemy odpowiednio

$$|a_n-g|<1\,,$$

$$|a_n-g|<\frac{\varepsilon}{2\cdot(|h|+1)}$$

oraz

$$|b_n-h|<\frac{\varepsilon}{2\cdot(|g|+1)}\,.$$

Stąd

$$|a_nb_n-gh|=|a_nb_n-a_nh+a_nh-gh|\leqslant|a_nb_n-a_nh|+|a_nh-gh|=|a_n|\cdot|b_n-h|+|h|\cdot|a_n-g|=$$
$$=|a_n-g+g|\cdot|b_n-h|+|h|\cdot|a_n-g|\leqslant(|a_n-g|+|g|)\cdot|b_n-h|+|h|\cdot|a_n-g|\leqslant$$
$$\leqslant(1+|g|)\cdot\frac{\varepsilon}{2\cdot(|g|+1)}+|h|\cdot\frac{\varepsilon}{2\cdot(|h|+1)}<(|g|+1)\cdot\frac{\varepsilon}{2\cdot(|g|+1)}+(|h|+1)\cdot\frac{\varepsilon}{2\cdot(|h|+1)}=\varepsilon\,.$$

Warunek Cauchy'ego.

Przypomnijmy, że ciąg (a_n) spełnia **warunek Cauchy'ego** (inaczej: jest **ciągiem Cauchy'ego**), jeżeli

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{m,n\geqslant N}{\forall}\ |a_m-a_n|<\varepsilon\,.$$

Intuicyjnie: Warunek Cauchy'ego oznacza, że dalekie wyrazy ciągu są bliskie sobie.

Okazuje się, że spełnianie warunku Cauchy'ego **jest równoważne zbieżności** ciągu.

Udowodnimy to tylko w jedną stronę, a mianowicie wykażemy, że ze zbieżności ciągu (a_n):

$$\underset{\varepsilon_1>0}{\forall}\ \underset{N_1(\varepsilon_1)}{\exists}\ \underset{n\geqslant N_1(\varepsilon_1)}{\forall}\ |a_n-g|<\varepsilon_1$$

wynika spełnianie przez niego warunku Cauchy'ego:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{m,n\geqslant N}{\forall}\ |a_m-a_n|<\varepsilon$$

Dowód wygląda następująco:

Niech ε będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Dobieramy

$$N=N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Wówczas dla każdych $m,n\geqslant N$ mamy

$$m\geqslant N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \qquad \text{oraz} \qquad n\geqslant N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

skąd otrzymujemy

$$|a_m-g|<\frac{\varepsilon}{2}$$

oraz

$$|a_n-g|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Stąd

$$|a_m-a_n|=|(a_m-g)+(g-a_n)|\leqslant|a_m-g|+|a_n-g|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Naturalne wydaje się pytanie: Skoro warunek Cauchy'ego i zbieżność oznaczają to samo, to po co używać dwóch różnych pojęć dla określenia tej samej własności?

Otóż ludzie uogólniają zbieżność ciągów na bardziej abstrakcyjne obiekty, zwane przestrzeniami metrycznymi. W każdej przestrzeni metrycznej ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego, czego dowód praktycznie jest powyżej[1]. Natomiast w drugą stronę to już nie zawsze tak jest. Co więcej, to że w jakiejś przestrzeni metrycznej każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny, jest na tyle interesujące, że doczekało się specjalnej nazwy: przestrzeń metryczna, w której tak jest, nazywa się **przestrzenią zupełną.**

Bardzo łatwo wyobrazić sobie przestrzeń, która nie jest zupełna: liczby wymierne. W świecie liczb wymiernych ciąg kolejnych przybliżeń dziesiętnych[2] liczby $\sqrt{2}$:

$$a_n=\frac{\left[10^n\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right]}{10^n}$$

spełnia warunek Cauchy'ego, ale do żadnej liczby wymiernej zbieżny nie jest.

Twierdzenie Bolzana-Weierstrassa.

Trzeba znać ideę dowodu tego twierdzenia. Najlepiej obejrzeć (jeśli ktoś tego wcześniej nie zrobił) w internecie[3] wykład doc. Górniaka z PWr:

Odcinek **21:** Podciąg ciągu. Lemat Bolzano-Weierstrassa.

[1]Idea ogólnego dowodu jest niezmienna niezależnie od komplikacji samej przestrzeni: jeśli wyrazy ciągu są bliskie granicy, to są bliskie siebie.

[2]Zapis $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x, a więc $\left[x+\frac{1}{2}\right]$ jest zaokrągleniem liczby x do najbliższej liczby całowitej, gdzie połówki zaokrąglamy w górę.

[3]Link do wykładów doc. Górniaka: `https://oze.pwr.edu.pl/kursy/analiza/analiza.html`

Zbieżność ciągów monotonicznych i ograniczonych – przykłady.

171. Jaką wartość ma liczba $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots}}}}}}$?

Rozwiązanie:

Oznaczając dane wyrażenie przez x zauważamy, że

$$x=\sqrt{2+x}\,,$$

czyli

$$x^2=2+x\,,$$

skąd $x=-1$ lub $x=2$. Ponieważ x musi być nieujemne (jako pierwiastek kwadratowy), otrzymujemy $x=2$.

172. Jaką wartość ma liczba $\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{\ldots}}}}}}$?

Rozwiązanie:

Oznaczając dane wyrażenie przez x zauważamy, że

$$x=\sqrt{2x}\,,$$

czyli

$$x^2=2x\,,$$

skąd $x=0$ lub $x=2$. Wiemy, że x musi być nieujemne (jako pierwiastek kwadratowy), ale to nam nie pomaga w wybraniu właściwej wartości.

Ponadto takie podejście milcząco zakłada, że napisane wyrażenie ma sensownie zdefiniowaną wartość i że można tym wyrażeniem odpowiednio manipulować. Więc zanim zdecydujemy się trochę w ciemno przypisać mu jakąś wartość, zastanówmy się, co takie wyrażenie mogłoby oznaczać.

Mamy napis składający się z nieskończenie wielu pierwiastków. Gdybyśmy chcieli z dobrą dokładnością obliczyć jego wartość, trzeba byłoby obliczyć wartość wyrażenia skończonego, choć może rozciągającego się po horyzont. Jednym słowem trzeba byłoby te pierwiastki urwać bardzo bardzo daleko. To jest nic innego niż rozważenie ciągu liczb zapisanych w ten sam deseń, co dane wyrażenie, tylko składających się z coraz większej liczby pierwiastków, a następnie zainteresowanie się granicą tego ciągu.

Niech więc

$$a_n=\underbrace{\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}}}}}_{n\text{ dwójek}}\,,$$

czyli

$$a_1=\sqrt{2}\qquad\text{oraz}\qquad a_{n+1}=\sqrt{2\cdot a_n}\quad\text{dla}\quad n\in\mathbb{N}\,.$$

Indukcyjnie dowodzimy, że dla każdego n zachodzi nierówność $a_n<2$:

$$a_1=\sqrt{2}<2 \qquad \text{oraz} \qquad (a_n<2)\Rightarrow\left(a_{n+1}=\sqrt{2\cdot a_n}<\sqrt{2\cdot 2}=2\right).$$

Indukcyjnie dowodzimy, że ciąg (a_n) jest rosnący:

$$a_1=\sqrt{2}<\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}=a_2 \qquad \text{oraz} \qquad (a_n<a_{n+1})\Rightarrow\left(a_{n+1}=\sqrt{2\cdot a_n}<\sqrt{2\cdot a_{n+1}}=a_{n+2}\right).$$

Skoro ciąg (a_n) jest rosnący i ograniczony z góry przez liczbę 2, to jest zbieżny. Niech x będzie jego granicą. Wtedy

$$x=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2\cdot a_n}=\sqrt{2\cdot\lim_{n\to\infty}a_n}=\sqrt{2x}\,,$$

co wobec dodatniości wyrazów ciągu (a_n) prowadzi do $x=2$.

*   * * *   * * * * *   * * *   *
*   * * *   *

W tym momencie trzeba się uderzyć w piersi i przyznać, że rozwiązanie poprzedniego zadania pozostawia wątpliwości, gdyż nie wykazaliśmy, że dane wyrażenie ma sens. Jednak wystarczy skopiować powyższe rozwiązanie:

Niech

$$a_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{n\ \text{dwójek}}\,,$$

czyli

$$a_1=\sqrt{2} \qquad \text{oraz} \qquad a_{n+1}=\sqrt{2+a_n} \quad \text{dla} \quad n\in\mathbb{N}\,.$$

Indukcyjnie dowodzimy, że dla każdego n zachodzi nierówność $a_n<2$:

$$a_1=\sqrt{2}<2 \qquad \text{oraz} \qquad (a_n<2)\Rightarrow\left(a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+2}=2\right).$$

Indukcyjnie dowodzimy, że ciąg (a_n) jest rosnący:

$$a_1=\sqrt{2}<\sqrt{2+\sqrt{2}}=a_2 \qquad \text{oraz} \qquad (a_n<a_{n+1})\Rightarrow\left(a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+a_{n+1}}=a_{n+2}\right).$$

Skoro ciąg (a_n) jest rosnący i ograniczony z góry przez liczbę 2, to jest zbieżny. Niech x będzie jego granicą. Wtedy

$$x=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+a_n}=\sqrt{2+\lim_{n\to\infty}a_n}=\sqrt{2+x}\,,$$

co wobec dodatniości wyrazów ciągu (a_n) prowadzi do $x=2$.

173. Jaką wartość ma liczba $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}}$?

Rozwiązanie:

Oznaczając dane wyrażenie przez x zauważamy, że

$$x=\left(\sqrt{2}\right)^x,$$

czyli

$$\sqrt[x]{x}=\sqrt{2}\,,$$

skąd[4] $x=2$ lub $x=4$. Na razie nie mamy jednak żadnych podstaw, aby wskazać którąkolwiek z tych wartości jako lepszą od drugiej.

Przyjmijmy, że a_n jest skończoną wieżą potęg złożoną z n pierwiastków, czyli

$$a_1=\sqrt{2} \qquad \text{oraz} \qquad a_{n+1}=\left(\sqrt{2}\right)^{a_n} \quad \text{dla} \quad n\in\mathbb{N}\,.$$

Indukcyjnie dowodzimy, że dla każdego n zachodzi nierówność $a_n<2$:

$$a_1=\sqrt{2}<2 \qquad \text{oraz} \qquad (a_n<2)\Rightarrow\left(a_{n+1}=\left(\sqrt{2}\right)^{a_n}<\left(\sqrt{2}\right)^2=2\right)\,.$$

Indukcyjnie dowodzimy, że ciąg (a_n) jest rosnący:

$$a_1=\sqrt{2}<\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}=a_2 \qquad \text{oraz} \qquad (a_n<a_{n+1})\Rightarrow\left(a_{n+1}=\left(\sqrt{2}\right)^{a_n}<\left(\sqrt{2}\right)^{a_{n+1}}=a_{n+2}\right)\,.$$

Skoro ciąg (a_n) jest rosnący i ograniczony z góry przez liczbę 2, to jest zbieżny. Niech x będzie jego granicą. Wtedy

$$x=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\right)^{a_n}=\left(\sqrt{2}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}=\left(\sqrt{2}\right)^{x}\,,$$

co wobec ograniczoności ciągu (a_n) z góry przez 2 prowadzi do odrzucenia $x=4$. Ostatecznie $x=2$.

174. Czy wyrażenie $a^{a^{a^{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}}$, gdzie $a=13/9=1,(4)$, ma sens liczbowy?

Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że a_n jest skończoną wieżą potęg[5] złożoną z n egzemplarzy liczby a, czyli

$$a_1=13/9 \qquad \text{oraz} \qquad a_{n+1}=(13/9)^{a_n} \quad \text{dla} \quad n\in\mathbb{N}\,.$$

Indukcyjnie dowodzimy, że ciąg (a_n) jest rosnący:

$$a_1=a<a^a=a_2 \qquad \text{oraz} \qquad (a_n<a_{n+1})\Rightarrow\left(a_{n+1}=a^{a_n}<a^{a_{n+1}}=a_{n+2}\right)\,.$$

Indukcyjnie dowodzimy[6], że dla każdego n zachodzi nierówność $a_n<2,65$:

$$a_1=1,(4)<2,65 \qquad \text{oraz} \qquad (a_n<2,65)\Rightarrow\left(a_{n+1}=(1,(4))^{a_n}<(1,(4))^{2,65}<2,65\right)\,.$$

Skoro ciąg (a_n) jest rosnący i ograniczony z góry przez liczbę 2,65, to jest zbieżny, a jego granica jest wartością danego w zadaniu nieskończonego wyrażenia.

Obliczenia przy użyciu komputera pokazują, że granica rozważanego ciągu, a więc i wartość danego wyrażenia, jest w przybliżeniu równa 2,6413222.

[4] Nietrudno sprawdzić, że liczby 2 i 4 są rozwiązaniami tego równania. Wykazanie, że nie ma więcej rozwiązań wymaga wiedzy, której na razie nie mamy, ale jeszcze w tym semestrze posiądziemy.

[5] Dla dużych n to powinno być świetne przybliżenie wartości nieskończonej wieży potęg.

[6] Wspomagając się kalkulatorem, który weryfikuje, że

$$(1,(4))^{2,65}<2,65\,.$$

175. Czy wyrażenie $a^{a^{a^{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}}$, gdzie $a = 718/497 \approx 1,444668$, ma sens liczbowy?

Rozwiązanie:

Na pierwszy rzut oka wygląda to na nudną kalkę poprzedniego przykładu.

Przyjmijmy więc, że a_n jest skończoną wieżą potęg złożoną z n egzemplarzy liczby a, czyli

$$a_1 = 718/497 \qquad \text{oraz} \qquad a_{n+1} = (718/497)^{a_n} \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Obliczenia przy użyciu komputera pokazują, że

$$a_1 \approx 1,444668$$
$$a_2 \approx 1,701421$$
$$a_3 \approx 1,869962$$
$$a_4 \approx 1,989574$$
$$a_5 \approx 2,079076$$
$$a_6 \approx 2,148671$$
$$a_7 \approx 2,204393$$
$$a_8 \approx 2,250047$$
$$a_9 \approx 2,288156$$
$$a_{10} \approx 2,320461$$
$$a_{20} \approx 2,490369$$
$$a_{30} \approx 2,558257$$
$$a_{40} \approx 2,594898$$
$$a_{50} \approx 2,617854$$
$$a_{60} \approx 2,633595$$
$$a_{70} \approx 2,645063$$
$$a_{80} \approx 2,653792$$
$$a_{90} \approx 2,66066$$
$$a_{100} \approx 2,666206$$
$$a_{200} \approx 2,691756$$
$$a_{300} \approx 2,700515$$
$$a_{400} \approx 2,704952$$
$$a_{500} \approx 2,707639$$
$$a_{600} \approx 2,709446$$

$$a_{700} \approx 2,710746$$
$$a_{800} \approx 2,71173$$
$$a_{900} \approx 2,712502$$
$$a_{1000} \approx 2,713126$$
$$a_{2000} \approx 2,716092$$
$$a_{3000} \approx 2,717296$$
$$a_{4000} \approx 2,718116$$
$$a_{5000} \approx 2,718886$$

Jak na razie wszystko wskazuje na to, że ciąg jest zbieżny do granicy około 2,72...

$$a_{6000} \approx 2,719859$$
$$a_{7000} \approx 2,721684$$
$$a_{8000} \approx 2,730474$$
$$a_{8100} \approx 2,734094$$
$$a_{8200} \approx 2,74068$$
$$a_{8300} \approx 2,756469$$
$$a_{8400} \approx 2,845796$$
$$a_{8410} \approx 2,884433$$
$$a_{8420} \approx 2,956325$$
$$a_{8430} \approx 3,135727$$
$$a_{8440} \approx 4,292083$$
$$a_{8441} \approx 4,849955$$
$$a_{8442} \approx 5,95481$$
$$a_{8443} \approx 8,941048$$
$$a_{8444} \approx 26,82217$$
$$a_{8445} \approx 19289,71$$
$$a_{8446} \approx 7,569799 \cdot 10^{3081}$$

i ciąg (a_n) dąży do nieskończoności.

Zatem dane wyrażenie nie ma sensu liczbowego (można mu co najwyżej przypisać wartość nieskończoną).