Liczba e.

Na początek rozwiążemy dwa zadania dotyczące monotoniczności ciągów. Ale zanim do nich przystąpimy, przypomnijmy **nierówność między średnimi geometryczną i arytmetyczną:**

Dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność[1]

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}\,.$$

Inna wersja tej samej nierówności:

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_n \leqslant \left(\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n}\right)^n . \qquad (1)$$

Nierówność (1) można wysłowić następująco:

(*) Iloczyn n liczb rzeczywistych dodatnich o ustalonej sumie jest największy, gdy liczby te są równe.

Istotnie, po obu stronach nierówności (1) występuje tyle samo czynników[2] (a mianowicie n), o takiej samej sumie równej $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n$.

161. Udowodnić, że ciąg (a_n) określony wzorem

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

jest rosnący, czyli dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} .$$

Rozwiązanie:

Daną w treści zadania nierówność możemy przepisać w postaci

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} < \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\,,$$

czyli[3]

$$(n+1)^{2n+1} < n^n \cdot (n+2)^{n+1} . \qquad (2)$$

Mnożąc nierówność (2) stronami przez n otrzymujemy nierówność równoważną

$$n \cdot (n+1)^{2n+1} < n^{n+1} \cdot (n+2)^{n+1}\,,$$

którą możemy zapisać jako

$$\left(n^2+n\right) \cdot \left(n^2+2n+1\right)^n < \left(n^2+2n\right)^{n+1} . \qquad (3)$$

[1] A przy tym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ są równe.

[2] Po prawej stronie występuje n równych czynników.

[3] Do nierówności (2) każdy powinien dojść bez problemu. I tu zaczynają się schody, bo nie od razu widać, co robić dalej. Jeśli mamy skorzystać z nierówności między średnimi w wersji (*), to po stronie nierówności, która ma być większa, powinniśmy uzyskać iloczyn równych czynników, czyli potęgę. To oznacza, że prawą stronę nierówności (2) trzeba uzupełnić dodatkowym czynnikiem n.

Ponieważ po każdej ze stron nierówności (3) występuje iloczyn $n+1$ czynników o takiej samej sumie równej n^3+3n^2+2n, większą wartość ma ten iloczyn, którego czynniki są równe.

162. Udowodnić, że ciąg (b_n) określony wzorem

$$b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

jest malejący, czyli dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

Rozwiązanie:

Daną w treści zadania nierówność możemy przepisać w postaci

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}>\frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+2}},$$

czyli[4]

$$(n+1)^{2n+3}>n^{n+1}\cdot(n+2)^{n+2}. \tag{4}$$

Mnożąc nierówność (4) stronami przez $n+1$ otrzymujemy nierówność równoważną

$$(n+1)^{2n+4}>(n+1)\cdot n^{n+1}\cdot(n+2)^{n+2},$$

którą możemy zapisać jako

$$\left(n^2+2n+1\right)^{n+2}>\left(n^2+3n+2\right)\cdot\left(n^2+2n\right)^{n+1}. \tag{5}$$

Ponieważ po każdej ze stron nierówności (5) występuje iloczyn $n+2$ czynników o takiej samej sumie równej n^3+4n^2+5n+2, większą wartość ma ten iloczyn, którego czynniki są równe.

*   * * *   * * * * *   * * *   *
*   * * *   *

Podsumujmy, co uzyskaliśmy. Rozważaliśmy dwa ciągi określone wzorami

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=b_n,$$

z których (a_n) okazał się rosnący, a (b_n) malejący.

Ciągi te są ograniczone, gdyż ciąg (a_n) jest ograniczony z góry[5] przez $b_1=4$, a ciąg (b_n) jest ograniczony z dołu przez $a_1=2$.

[4]Zastosowanie nierówności między średnimi w wersji (*) bezpośrednio do nierówności (4) nie da spodziewanych rezultatów, gdyż suma czynników po lewej stronie okazuje się być mniejsza niż po stronie prawej. Bardziej subtelne oszacowanie dostaniemy dla czynników będących wyrażeniami kwadratowymi od n, a w tym celu trzeba czynniki liniowe pogrupować po dwa. To wymaga parzystego wykładnika po lewej stronie i dlatego domnażamy nierówność (4) przez $n+1$.

[5]Bo $a_1<a_n<b_n<b_1$.

Jako ciągi monotoniczne i ograniczone ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne. Niech więc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e_a$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e_b\,.$$

Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{e_b}{e_a}\,,$$

ale także

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1\,.$$

Stąd wniosek, że $e_a = e_b$, czyli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne do tej samej granicy, którą oznaczamy przez e.

Obejrzyj[6] w internecie[7] wykład doc. Górniaka z PWr:

Odcinek **22:** Ciąg $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

[6]Zauważ, że dla dowodu monotoniczności ciągu (a_n) doc. Górniak posłużył się nierównością Bernouliego. W istocie są to takie same rachunki jak zaprezentowanie przeze mnie, nierównść Bernouliego jest bowiem w swej istocie niczym innym jak nierównością między średnimi geometryczną i arytmetyczną dla układu liczb, z których wszystkie poza jedną są równe.

[7]Link do wykładów doc. Górniaka: `https://oze.pwr.edu.pl/kursy/analiza/analiza.html`