Własności ciągów.

Dziś zebranie podstawowych własności ciągów i twierdzeń z nimi związanych.

* * * * * * * * * * * * * * * * * *

Ciąg (a_n) jest **rosnący** (inne określenie: **ściśle rosnący**), jeżeli

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n<a_{n+1} \qquad \text{lub równoważnie} \qquad \forall_{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ m<n}}\ a_m<a_n\,.$$

* * * * * * * * * * * * * * * * * *

Ciąg (a_n) jest **malejący** (inne określenie: **ściśle malejący**), jeżeli

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n>a_{n+1} \qquad \text{lub równoważnie} \qquad \forall_{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ m<n}}\ a_m>a_n\,.$$

* * * * * * * * * * * * * * * * * *

Ciąg (a_n) jest **niemalejący** (inne określenie: **słabo rosnący**), jeżeli

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n\leqslant a_{n+1} \qquad \text{lub równoważnie} \qquad \forall_{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ m<n}}\ a_m\leqslant a_n\,.$$

* * * * * * * * * * * * * * * * * *

Ciąg (a_n) jest **nierosnący** (inne określenie: **słabo malejący**), jeżeli

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n\geqslant a_{n+1} \qquad \text{lub równoważnie} \qquad \forall_{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ m<n}}\ a_m\geqslant a_n\,.$$

* * * * * * * * * * * * * * * * * *

Ciąg (a_n) jest **stały**, jeżeli

$$\forall_{m,n\in\mathbb{N}}\ a_m=a_n\,.$$

* * * * * * * * * * * * * * * * * *

Ciąg jest **monotoniczny** (inne określenie: **słabo monotoniczny**), jeżeli jest niemalejący lub nierosnący.

* * * * * * * * * * * * * * * * * *

Ciąg jest **ściśle monotoniczny**, jeżeli jest rosnący lub malejący.

Ciąg (a_n) jest **ograniczony z góry**, jeżeli

$$\underset{M\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_n \leqslant M\,.$$

* *

Ciąg (a_n) jest **ograniczony z dołu**, jeżeli

$$\underset{M\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_n \geqslant M\,.$$

* *

Ciąg (a_n) jest **ograniczony**, jeżeli jest jednocześnie ograniczony z góry i z dołu, lub równoważnie

$$\underset{M\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ |a_n| \leqslant M\,.$$

* *

Ciąg (a_n) jest **zbieżny**, jeżeli

$$\underset{g\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ |a_n-g|<\varepsilon\,.$$

* *

Ciąg (a_n) spełnia **warunek Cauchy'ego** (inaczej: jest **ciągiem Cauchy'ego**), jeżeli

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{m,n\geqslant N}{\forall}\ |a_m-a_n|<\varepsilon\,.$$

* *

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny do $+\infty$**, jeżeli

$$\underset{M\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ a_n>M\,.$$

* *

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny do $-\infty$**, jeżeli

$$\underset{M\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ a_n<M\,.$$

* *

Podciągiem ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy każdy ciąg postaci $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, gdzie $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jest rosnącym ciągiem o wyrazach całkowitych dodatnich.

Podstawowe twierdzenia.

A oto najważniejsze twierdzenia dotyczące ciągów.

* * * * * * * * * * * * * * *

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

* * * * * * * * * * * * * * *

Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

* * * * * * * * * * * * * * *

Ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego.

* * * * * * * * * * * * * * *

Ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego podciąg jest zbieżny.
Wniosek: Ciąg zawierający podciąg rozbieżny jest rozbieżny.

* * * * * * * * * * * * * * *

Ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego podciąg jest zbieżny do tej samej granicy.
Wniosek: Ciąg mający podciągi zbieżne do różnych granic jest rozbieżny.

* * * * * * * * * * * * * * *

Jeżeli ciąg można podzielić na skończenie wiele podciągów zbieżnych do tej samej granicy, to jest on zbieżny do tejże granicy.

* * * * * * * * * * * * * * *

Twierdzenie Bolzana-Weierstrassa:
Z każdego ciągu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny.

* * * * * * * * * * * * * * *

Obejrzyj w internecie[1] wykłady doc. Górniaka z PWr:

Odcinek **19:** Twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym.
Odcinek **21:** Podciąg ciągu. Lemat Bolzano-Weierstrassa.
Odcinek **23:** Granice niewłaściwe ciągów.

[1]Link do wykładów doc. Górniaka: `https://oze.pwr.edu.pl/kursy/analiza/analiza.html`