Twierdzenie o trzech ciągach.

Dziś opowiem Wam o kolejnym twierdzeniu umożliwiającym sprawne obliczanie granic ciągów. Bardziej teoretyczne rozważania związane z ciągami wyłożę odrobinkę później.

Na początek spójrzmy na takie zadanie:

134. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right).$$

W pierwszym odruchu niejeden początkujący granicoobliczeniowiec pomyśli tak: Wyraz ciągu jest sumą, której każdy składnik dąży do zera, a że granica sumy jest sumą granic, to w granicy otrzymamy sumę zer, czyli zero. Niestety takie rozumowanie jest błędne i prowadzi do błędnych wyników.

Mamy bowiem uproszczoną sytuację:

$$1=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}_{n\text{ razy}},$$

w której lewa strona jest jedynką, a prawa strona jest sumą składników dążących do zera przy $n\to\infty$. Widać tu ewidentnie, że granica sumy składników dążących do zera może być różna od zera, jeśli liczba składników rośnie nieograniczenie.

Granica sumy, i owszem, jest sumą granic, ale aby tak twierdzić, musimy mieć ustaloną liczbę składników.

Wyrażenia pod znakiem granicy nie uda nam się sensownie przekształcić — pierwiastki dość przypadkowych liczb w mianownikach skutecznie odbierają nam nadzieję na użyteczne przekształcenie tej sumy. Będąc niewolnikami dokładnego przekształcania wyrażeń, nie ruszymy z miejsca. Tymczasem nasz cel jest skromniejszy niż kurczowe trzymanie się dokładnej wartości wyrazów ciągu: chcemy zrozumieć jaka jest w przybliżeniu wielkość wyrazów ciągu o dużych indeksach.

W tym celu dokonajmy szacowania danej sumy od góry i od dołu przez możliwie proste wyrażenia. Szacowanie nie musi być super dokładne, byleby nie było przeraźliwie grube. Oszacujemy sumę przez liczbę jej składników pomnożoną przez składnik najmniejszy[1] i największy[2]. Suma ma n składników, z których pierwszy jest największy, a ostatni najmniejszy. Wobec tego

$$1\leftarrow\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\to 1.$$

Ponieważ dla dużych n oba oszacowania (dolne i górne) są liczbami bliskimi 1, więc rozważana suma jest także bliska 1. To sugeruje, że dana w zadaniu granica istnieje i jest równa 1.

[1] Dla oszacowania od dołu.
[2] Dla oszacowania od góry.

Tak jest w istocie, gdyż w powyższym rozumowaniu wykorzystaliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie o trzech ciągach[3]: Jeżeli dane są takie trzy ciągi (a_n), (b_n), (c_n), że dla każdej[4] liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$b_n \leqslant a_n \leqslant c_n\,,$$

a ponadto ciągi (b_n) i (c_n) są zbieżne do wspólnej granicy g, to ciąg (a_n) też jest zbieżny i jego granicą jest g, czyli wspólna granica ciągów (b_n) i (c_n).

Skrótowo możemy to zapisać przy pomocy symboli jako:

$$\left(\left(\mathop{\forall}_{n\in\mathbb{N}} b_n \leqslant a_n \leqslant c_n\right) \wedge \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = g\,.$$

Użytek z twierdzenia o trzech ciągach robimy następujaco. Załóżmy, że dany jest ciąg, w którym nie jesteśmy w stanie sensownie przekształcić wzoru na n-ty wyraz. Jeżeli potrafimy tak oszacować wyrazy ciągu od góry i od dołu, aby oszacowania te miały wspólną granicę, to ta wspólna granica jest także granicą wyjściowego ciągu. Oszacowania te powinny mieć następujące 3 cechy:
• wyrażenia, którymi szacujemy wyrazy ciągu powinny być na tyle proste, aby dało się w nich łatwo przejść do granicy,
• szacowania nie powinny być zbyt grube, bo wyrażenia szacujące powinny mieć wspólną granicę,
• przy spełnieniu powyższych dwóch warunków, powinniśmy starać się przeprowadzić oszacowania w możliwie najprostszy sposób.

Popatrzmy na kolejny przykład:

135. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^4+1}}{n^3+1}+\frac{\sqrt{n^4+2}}{n^3+2}+\frac{\sqrt{n^4+3}}{n^3+3}+\ldots+\frac{\sqrt{n^4+n}}{n^3+n}\right).$$

Pod znakiem granicy występuje suma złożona z n składników[5]. Tym razem nie będziemy mieli ambicji, aby określić, który składnik jest największy, a który najmniejszy. Nie jest to oczywiste, gdyż w miarę posuwania się od początku do końca sumy, liczniki składników rosną[6], ale rosną też mianowniki[7].

[3]Twiedzenie to jest czasem żartobliwie nazywane twierdzeniem o policjantach, ze względu na następujące sformułowanie: *Jeżeli ulicą idzie dwóch policjantów, a miedzy nimi student, i policjanci idą na komisariat, to student też idzie na komisariat.*

[4]Prościej i zgrabniej jest powiedzieć "dla każdej", ale ponieważ zbieżność i granica ciągu nie zależą od majstrowania przy skończenie wielu wyrazach ciągu, można byłoby napisać "dla prawie każdej", rozumiejąc przez to, że dopuszczamy skończenie wiele n, dla których te nierówności nie są spełnione.

[5]Na wykładzie podaję przykłady, w których sumy mają n składników. Chodzi o to, aby nie komplikować tych przykładów i wyraźnie pokazać podstawowe zjawiska. Przykłady, w których wyznaczenie liczby wyrazów jest istotną częścią zadania, pojawią się na liście zadań nr 9.

[6]Co przy dodatnich składnikach jest przyczynkiem do wzrostu składników.

[7]A to z kolei jest przyczynkiem do tego, aby składniki malały.

W zupełności wystarczy, że oszacujemy składniki od góry i od dołu, korzystając z postaci k-tego[8] składnika:

$$\frac{\sqrt{n^4+1}}{n^3+n} \leqslant \frac{\sqrt{n^4+k}}{n^3+k} \leqslant \frac{\sqrt{n^4+n}}{n^3+1}\,.$$

W powyższych oszacowaniach oszacowaliśmy niezależnie od siebie mianowniki i liczniki. Inne sensowne oszacowania to:

$$\frac{\sqrt{n^4+0}}{n^3+n} \leqslant \frac{\sqrt{n^4+k}}{n^3+k} \leqslant \frac{\sqrt{n^4+n}}{n^3+0}\,.$$

Wykorzystanie ostatnich oszacowań w połączeniu z wyznaczoną wcześniej liczbą składników równą n daje:

$$n\cdot\frac{\sqrt{n^4+0}}{n^3+n} \leqslant \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^3+1}+\frac{\sqrt{n^4+2}}{n^3+2}+\frac{\sqrt{n^4+3}}{n^3+3}+\ldots+\frac{\sqrt{n^4+n}}{n^3+n} \leqslant n\cdot\frac{\sqrt{n^4+n}}{n^3+0}\,.$$

Ponieważ oszacowania dolne i górne dążą do 1 przy $n\to\infty$, na mocy twierdzenia o trzech ciągach dana w zadaniu granica istnieje i jest równa 1.

W powyższych dwóch przykładach szacowania sum miały możliwie prostą postać: liczba składników razy wspólne oszacowanie składników. Taka strategia szacowania wystarczy do rozwiązania zadań z listy 9.

Zajmijmy się teraz przykładami, w których takie podejście jest niewystarczające.

136. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n+2}{\sqrt{n^4+2}}+\frac{n+3}{\sqrt{n^4+3}}+\ldots+\frac{2n}{\sqrt{n^4+n}}\right).$$

Najpierw zobaczmy, do czego doprowadzi szacowanie składników przez wspólną wielkość:

$$1\leftarrow n\cdot\frac{n+1}{\sqrt{n^4+n}} \leqslant \frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n+2}{\sqrt{n^4+2}}+\frac{n+3}{\sqrt{n^4+3}}+\ldots+\frac{2n}{\sqrt{n^4+n}} \leqslant n\cdot\frac{2n}{\sqrt{n^4+1}}\to 2\,.$$

Tym razem oszacowania dolne i górne dążą do różnych granic. Zatem rozważany w zadaniu ciąg[9] może być zbieżny do jakiejkolwiek liczby pomiędzy[10] 1 i 2, ale może być też rozbieżny, jak np. ciąg $\left(\frac{7}{5}+\frac{(-1)^n}{5}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mający na przemian wyrazy 1,2 i 1,6.

Skąd wziął się problem? Czyżbyśmy zrobili jakieś oszacowania za grubo? Przyjęta strategia, aby wrzucić wszystkie składniki sumy do jednego worka i szacować wspólnie, nie miała szansy powodzenia. A to dlatego, że iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do 2 przy $n\to\infty$, czyli dla dużych n jest prawie równy 2. Jeśli do jednego worka

[8] Gdzie $1\leqslant k\leqslant n$.

[9] Chodzi oczywiście o ciąg, którego n-ty wyraz jest równy

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n+2}{\sqrt{n^4+2}}+\frac{n+3}{\sqrt{n^4+3}}+\ldots+\frac{2n}{\sqrt{n^4+n}}\,.$$

[10] Z 1 i 2 włącznie.

wrzucamy składniki, z których największy jest prawie dwa razy większy od najmniejszego, to nie dziwmy się, że oszacowania dolne i górne różnią się o czynnik 2.

Zauważmy, że za różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki są z grubsza takie same. Wykonajmy więc szacowania tylko na poziomie mianowników[11], a następnie dodajmy liczniki, które tworzą postęp arytmetyczny. Otrzymujemy:

$$\frac{1}{\sqrt{n^4+n}}\cdot\sum_{k=1}^{n}(n+k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{\sqrt{n^4+n}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{\sqrt{n^4+k}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{\sqrt{n^4+0}}=\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}(n+k)\,.$$

Ponieważ

$$\sum_{k=1}^{n}(n+k)=\frac{n\cdot(3n+1)}{2}\,,$$

otrzymujemy

$$\frac{3}{2}\leftarrow\frac{1}{\sqrt{n^4+n}}\cdot\frac{n\cdot(3n+1)}{2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{\sqrt{n^4+k}}\leqslant\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n\cdot(3n+1)}{2}\to\frac{3}{2}\,,$$

skąd na mocy twierdzenia o trzech ciągach dana w zadaniu granica jest równa $3/2$.

Powyższy przykład może być nieco demoralizujący. Początkowa próba szacowania dała oszacowania dążące do 1 i 2. Naturalnym kompromisem jest 1,5 i taką granicę w końcu otrzymaliśmy. Ktoś mógłby pomyśleć, że to cudowna droga do uogólnienia twierdzenia o trzech ciągach. To jednak wynika z prostoty przykładu, a konkretnie z tego, że wyrazy tworzą z grubsza postęp arytmetyczny[12].

Otóż suma postępu arytmetycznego jest właśnie takim kompromisem. Naiwnie można myśleć, że suma jest równa pierwszemu składnikowi razy liczba składników. A może ostatni składnik razy liczba składników? Dla postępu arytmetycznego odpowiedzią jest kompromis, a mianowicie jego suma jest średnią arytmetyczną tych dwóch naiwnie błędnie obliczonych sum.

Kolejny przykład pokazuje, że idealny kompromis nie zawsze jest właściwą odpowiedzią.

137. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^6+1}}+\frac{4}{\sqrt{n^6+2}}+\frac{9}{\sqrt{n^6+3}}+\ldots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n}}\right).$$

Wspólne szacowanie składników prowadzi do:

$$0\leftarrow n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+k}}\leqslant n\cdot\frac{n^2}{\sqrt{n^6+0}}\to 1\,,$$

co może skłaniać do obstawienia $1/2$ jako granicy.

[11] Po to, aby po oszacowaniu wszystkie składniki miały wspólny mianownik, dzięki czemu będzie można je dodać.

[12] Bo mianowniki są zbliżone, a postęp arytmetyczny jest w licznikach.

Tymczasem wykonując szacowania mianowników otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+n}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+k}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+0}}=\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2\,,$$

co po uwzględnieniu

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

daje

$$\frac{1}{3}\leftarrow\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+k}}\leqslant\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\to\frac{1}{3}\,.$$

Zatem szukana granica ma wartość $1/3$.

Kolejny przykład:

138. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^k+1}}+\frac{8}{\sqrt[3]{n^k+2}}+\frac{27}{\sqrt[3]{n^k+3}}+\ldots+\frac{n^3}{\sqrt[3]{n^k+n}}\right)$$

dla tak dobranej wartości parametru k, aby granica ta była dodatnia i skończona.

Szacowania mianowników prowadzą do:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^k+n}}\cdot\sum_{i=1}^{n}i^3=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{\sqrt[3]{n^k+n}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{\sqrt[3]{n^k+i}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{\sqrt[3]{n^k+0}}=\frac{1}{n^{k/3}}\cdot\sum_{i=1}^{n}i^3\,,$$

co po uwzględnieniu

$$\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

daje

$$\frac{1}{n^{k/3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^k-1}}}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{\sqrt[3]{n^k+i}}\leqslant\frac{1}{n^{k/3}}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\,.$$

Powyższe oszacowania dolne i górne dążą do $1/4$, o ile $k/3=4$, czyli $k=12$.

A na koniec dzisiejszego wykładu takie oto zadanko:

139. Obliczyć granicę ciągu:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^k+n^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^k+n^2+2}}+\frac{3}{\sqrt{n^k+n^2+3}}+\frac{4}{\sqrt{n^k+n^2+4}}+\ldots+\frac{}{\sqrt{n^k+(n+1)^2}}\right)$$

dla tak dobranej wartości naturalnej parametru k, aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

Uwaga: W ostatnim składniku sumy brakuje licznika. Jego uzupełnienie jest częścią zadania.

Rozwiązanie:

Patrząc na mianowniki widzimy, że suma składa się z $2n+1$ składników, wobec czego zadanie polega na obliczeniu granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^k+n^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^k+n^2+2}}+\frac{3}{\sqrt{n^k+n^2+3}}+\frac{4}{\sqrt{n^k+n^2+4}}+\ldots+\frac{2n+1}{\sqrt{n^k+(n+1)^2}}\right).$$

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy przy $k\geqslant 3$ mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{\sqrt{n^k+n^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^k+n^2+2}}+\frac{3}{\sqrt{n^k+n^2+3}}+\frac{4}{\sqrt{n^k+n^2+4}}+\ldots+\frac{2n+1}{\sqrt{n^k+(n+1)^2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1+2+3+4+\ldots+(2n+1)}{\sqrt{n^k+0}}=\frac{1+2+3+4+\ldots+(2n+1)}{n^{k/2}}=c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{\sqrt{n^k+n^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^k+n^2+2}}+\frac{3}{\sqrt{n^k+n^2+3}}+\frac{4}{\sqrt{n^k+n^2+4}}+\ldots+\frac{2n+1}{\sqrt{n^k+(n+1)^2}}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1+2+3+4+\ldots+(2n+1)}{\sqrt{n^k+(n+1)^2}}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$1+2+3+4+\ldots+(2n+1)=(2n+1)\cdot(n+1)\,.$$

Wobec tego

$$c_n=\frac{(2n+1)\cdot(n+1)}{n^{k/2}}\to 2$$

przy $n\to\infty$, o ile $k=4$. Podobnie

$$a_n=\frac{(2n+1)\cdot(n+1)}{\sqrt{n^k+(n+1)^2}}=\frac{(2n+1)\cdot(n+1)}{n^{k/2}\cdot\sqrt{1+(1+n^{-1})^2\cdot n^{2-k}}}\to 2$$

przy $n\to\infty$, o ile $k=4$.

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 2$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 2\,.$$

Odpowiedź: Granica podana w treści zadania ma dla $k=4$ wartość 2.

Obejrzyj w internecie[13] wykład doc. Górniaka z PWr:

Odcinek **20:** Twierdzenie o trzech ciągach.

[13]Link do wykładów doc. Górniaka: `https://oze.pwr.edu.pl/kursy/analiza/analiza.html`