Obliczanie granic ciągów.

Przytoczmy, na razie bez dowodu, podstawowe twierdzenia, które pozwolą nam obliczać granice ciągów zbieżnych[1] bez odwoływania się do definicji granicy.

1. Ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę.

2. Granica sumy jest sumą granic.
Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg (a_n+b_n) jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n\ .$$

3. Granica różnicy jest różnicą granic.
Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg (a_n-b_n) jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n\ .$$

4. Granica iloczynu jest iloczynem granic.
Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg (a_nb_n) jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n\ .$$

5. Granica ilorazu jest ilorazem granic.
Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym $b_n\neq 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$, to ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}\ .$$

6. Zbieżność i granica nie zależą od pominięcia lub zmiany skończenie wielu początkowych wyrazów ciągu.

7. Słabe nierówności zachowują się przy przejściu do granicy.
Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym dla każdego n zachodzi nierówność $a_n\leqslant b_n$ (odpowiednio $a_n\geqslant b_n$), to $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ (odpowiednio $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n$).

8. Kilka podstawowych granic.
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$
$\lim\limits_{n\to\infty}a=a$
$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$ dla $|a|<1$
$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ dla $a>0$
$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

9. Z granicą można wchodzić pod pierwiastek.
Dokładniej, jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny, przy czym $a_n\geqslant 0$, to dla $k\in\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{\lim_{n\to\infty}a_n}\ .$$

Dla nieparzystych k warunek $a_n\geqslant 0$ można pominąć.

[1] Na razie mówimy tylko o granicach właściwych, czyli będących liczbami rzeczywistymi.

A oto przykłady zastosowania powyższych twierdzeń do obliczenia trzech granic, które poznaliśmy na poprzednim wykładzie.

120. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-n\,.$$

Rozwiązanie:
Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów przekształcamy wyrażenie pod znakiem granicy, a następnie wykonujemy przejście graniczne:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-n=\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}\,.$$

121. Obliczyć granicę

$$\sqrt[3]{n^3+n^2}-n\,.$$

Rozwiązanie:
Korzystając ze wzoru na różnicę sześcianów przekształcamy wyrażenie pod znakiem granicy, a następnie wykonujemy przejście graniczne:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+n^2}-n=\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n^3+n^2)^{2/3}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+n^2}+n^2}=\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2/3}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1}=$$

$$=\frac{1}{(1+0)^{2/3}+\sqrt[3]{1+0}+1}=\frac{1}{3}\,.$$

122. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{n^4+n^3}-n\,.$$

Rozwiązanie:
Korzystając dwukrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów przekształcamy wyrażenie pod znakiem granicy, a następnie wykonujemy przejście graniczne:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{n^4+n^3}-n=\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{\left(\sqrt{n^4+n^3}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+n^3}+n\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{1+0}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+0}+1\right)}=\frac{1}{4}\,.$$

Obejrzyj w internecie[2] wykład doc. Górniaka z PWr:

Odcinek **18:** Twierdzenia o arytmetyce granic.

[2]Link do wykładów doc. Górniaka: `https://oze.pwr.edu.pl/kursy/analiza/analiza.html`