# Ciągi liczbowe. Granica.

Ciąg liczbowy wyobrażamy sobie jako ustawione po kolei liczby[1]:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots \qquad (\diamondsuit)$$

Liczby te nazywamy wyrazami ciągu, przy czym liczbę stojącą na $n$-tej pozycji[2] nazywamy $n$-tym wyrazem ciągu.

Z formalnego punktu widzenia definiujemy ciąg liczbowy jako funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych[3] i przyjmującą wartości będące liczbami rzeczywistymi. Jeżeli nazwać tę funkcję $a$, czyli przyjąć, że $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, to $n$-ty wyraz ciągu będący wartością funkcji $a$ dla argumentu $n$ należałoby oznaczyć przez $a(n)$. Jednak w kontekście ciągu używamy wygodniejszego oznaczenia $a_n$. Co więcej, na ogół nie mówimy o ciągu $a$, rezerwując sobie literkę $a$ do ewentualnego oznaczania innych obiektów matematycznych mniej lub bardziej związanych z samym ciągiem. A także rezerwujemy sobie oznaczenia typu $a_0$ do oznaczenia różnych obiektów matematycznych, chociaż formalista zazgrzytałby zębami, że przecież $a_0$ powinno oznaczać wyraz ciągu stojący na pozycji zerowej.

Pamiętajmy, że $a_n$ oznacza $n$-ty wyraz ciagu, czyli pewną liczbę rzeczywistą. Jeżeli natomiast będziemy chcieli odnieść się do ciągu $(\diamondsuit)$, użyjemy oznaczenia $(a_n)$, które należy rozumieć jako skrót jednej z następujących pełnych wersji[4]:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (a_n)_{n=1}^{\infty} \qquad (a_n : n\in\mathbb{N})$$

W tym miejscu należy zwrócić uwagę na rozróżnienie napisów z nawiasami "( )" od napisów z nawiasami "{ }". Nawiasów "{ }" używamy do oznaczenia zbiorów. Mówiąc obrazowo, zbiory nie pamiętają kolejności swoich elementów, ani też nie ma czegoś takiego jak wielokrotne należenie elementu do zbioru. Potencjalny element może do zbioru należeć albo nie — trzeciej opcji nie ma. Tak więc poniższe napisy oznaczają ten sam zbiór:

$$\{1,2\}=\{2,1\}=\{1,1,2,1\}=\{1+1,1\cdot 1,1^1\}\,.$$

Natomiast nawiasy "( )" służą do oznaczenia uporządkowanych układów[5] liczb[6] lub też do oznaczenia funkcji. Tak więc kolejność elementów pary uporządkowanej ma znaczenie, np.:

$$(1,2)\neq(2,1)\,.$$

A funkcję $f:D_f\to\mathbb{R}$ możemy zapisać jako

$$f=(f(x): x\in D_f)\,.$$

W konsekwencji napis $\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$ nie oznacza ciągu liczbowego, ale zbiór wyrazów ciągu $(a_n)$, czyli wyrazy ciągu z utraconą informacją co do kolejności i krotności ich występowania. Niestety wśród niektórych autorów podręczników dość rozpowszechniony jest zwyczaj pisania: "ciąg $\{a_n\}$". Odnoście się do tych Autorów z należnym Im szacunkiem, ale przykładu z Nich nie bierzcie.

---

[1] Liczb tych jest nieskończenie wiele.
[2] W powyższym przykładzie jest to $a_n$.
[3] Czyli, powtarzam do znudzenia, całkowitych dodatnich.
[4] Wersji tych użyjemy, gdy skrócony zapis mógłby prowadzić do nieporozumień.
[5] Na przykład par uporządkowanych, trójek uporządkowanych.
[6] Bądź innych obiektów matematycznych.

Możemy więc użyć napisu $\left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dla oznaczenia ciągu kwadratów liczb naturalnych: 1, 4, 9, 16, ...

Przyjrzyjmy się różnym przykładom ciągów liczbowych:

$$a_n=\frac{n}{2n+1}$$
$$b_n=(-1)^n$$
$$c_n=n^n$$
$$d_n=(-1)^n\cdot n!$$
$$e_n=\sqrt{n^2+n}-n$$
$$f_n=\sqrt[3]{n^3+n^2}-n$$
$$g_n=\sqrt[4]{n^4+n^3}-n$$
$$h_n=\sqrt[n]{n}$$

Zastanówmy się, jak wyglądają wyrazy tych ciągów stojące na bardzo dalekich pozycjach. W niektórych przypadkach można na to odpowiedzieć od razu, a w niektórych trzeba się wspomóc odpowiednimi przekształceniami lub oszacowaniami. I tak:

$$a_n=\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot(2n+1)}\,,$$

co dla bardzo dużego $n$ jest równe $1/2$ minus bardzo mała liczba dodatnia. Zatem dla bardzo dużych $n$ mamy $a_n\approx 1/2$. Możemy więc powiedzieć, że dalekie wyrazy ciągu $(a_n)$ są prawie równe $1/2$. Informacja o tym, że wyraz ciągu ma daleką pozycję pozwala z bardzo dobrą dokładnością określić wartość tego wyrazu — nie musimy przy tym wiedzieć, który konkretnie to wyraz, bo dalekie wyrazy ciągu są prawie takie same.

Z kolei w ciągu $(b_n)$ wyrazy są na przemian równe 1 i $-1$. Informacja o tym, że liczba jest dalekim wyrazem tego ciągu nie pozwala podać jej przybliżonej wartości, gdyż liczba ta równie dobrze może być jedynką lub minus jedynką.

W ciągu $(c_n)$ dalekie wyrazy są dużymi liczbami dodatnimi, nie zbliżają się więc do żadnej konkretnej wartości liczbowej.

Natomiast w ciągu $(d_n)$ dalekie wyrazy mają dużą wartość bezwzględną, ale na dodatek bywają zarówno ujemne jak i dodatnie.

Dla pozostałych ciągów prawdziwe są udowodnione przez nas w zeszłym tygodniu oszacowania:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{8n}<e_n<\frac{1}{2} \tag{1}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{8n}<f_n<\frac{1}{3} \tag{2}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{9n}<g_n<\frac{1}{4} \tag{3}$$

$$1\leqslant h_n<1+\frac{2}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

z których to oszacowań wynika, że bardzo dalekie wyrazy tych ciągów są z bardzo dobrym przybliżeniem równe odpowiednio 1/2, 1/3, 1/4, 1. Do oszacowań tych możemy dorzucić utrzymane w tym samym stylu oszacowanie

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4n}<a_n<\frac{1}{2} \tag{5}$$

wynikające z nierówności

$$\frac{1}{4n}>\frac{1}{2\cdot(2n+1)}$$

oraz przypomnieć oszacowanie

$$1\leqslant h_n<1+\frac{3}{n^{2/3}} \tag{6}$$

z ostatniego wykładu.

Skoro dalekie wyrazy ciągów $(a_n)$, $(e_n)$, $(f_n)$, $(g_n)$, $(h_n)$ są z dobrym przybliżeniem równe odpowiednio 1/2, 1/2, 1/3, 1/4, 1, zastanówmy się jak daleko wystarczy[7] się posunąć w tych ciągach, aby błąd tego przybliżenia był mniejszy od jednej milionowej.

Biorąc pod uwagę, że

$$\left|a_n-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{4n}$$

$$\left|e_n-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{8n}$$

$$\left|f_n-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{8n}$$

$$\left|g_n-\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{9n}$$

$$|h_n-1|<\frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$|h_n-1|<\frac{3}{n^{2/3}}$$

**wystarczy** zapewnić, iż prawe strony tych nierówności nie będą większe od wymaganej przez nas jednej milionowej. To oznacza, że wystarczy, aby $n$ było nie mniejsze odpowiednio[8] od 250 000, 125 000, 125 000, 111 112, 4 000 000 000 000, 6 000 000 000.

[7]Zwracam uwagę na słowo "wystarczy". Nie pytam jak daleko "trzeba" się posunąć, bo to sugerowałoby wskazanie optymalnego (najwcześniejszego) miejsca. Tymczasem chodzi o wskazanie jakiegokolwiek miejsca (być może niepotrzebnie zbyt dalekiego), począwszy od którego żądane przybliżenie na pewno jest realizowane.

[8]Dla uzyskania ostatniej liczby wykorzystujemy nierówność $3^{3/2}=\sqrt{27}<6$, z której wynika

$$3\,000\,000^{3/2}<6\,000\,000\,000\,.$$

W konsekwencji otrzymujemy:

$$\left|a_n-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{4n}\leqslant\frac{1}{1\,000\,000} \qquad \text{dla } n\geqslant 250\,000$$

$$\left|e_n-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{8n}\leqslant\frac{1}{1\,000\,000} \qquad \text{dla } n\geqslant 125\,000$$

$$\left|f_n-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{8n}\leqslant\frac{1}{1\,000\,000} \qquad \text{dla } n\geqslant 125\,000$$

$$\left|g_n-\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{9n}<\frac{1}{1\,000\,000} \qquad \text{dla } n\geqslant 111\,112$$

$$|h_n-1|<\frac{2}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{1\,000\,000} \qquad \text{dla } n\geqslant 4\,000\,000\,000\,000$$

$$|h_n-1|<\frac{3}{n^{2/3}}<\frac{1}{1\,000\,000} \qquad \text{dla } n\geqslant 6\,000\,000\,000$$

Dla każdego z ciągów $(a_n)$, $(e_n)$, $(f_n)$, $(g_n)$, $(h_n)$ wskazaliśmy więc taką liczbę[9] $N$, że dla wszystkich liczb naturalnych $n\geqslant N$ różnica między $n$-tym wyrazem odpowiedniego ciągu a liczbą, do której wyrazy ciągu się zbliżają, jest mniejsza od jednej milionowej. Oczywiście ta jedna milionowa jest tylko przykładową liczbą — zamiast niej można byłoby wziąć jakąkolwiek liczbę rzeczywistą dodatnią i stosownie do niej wyznaczyć liczbę $N$ mówiącą jak daleko należy się w ciągu posunąć.

Liczba $N$ wcale nie jest jednoznacznie wyznaczona, gdyż nie zakładamy jej optymalności. Być może jest ona niepotrzebnie duża, co może wynikać z naszej fantazji, a może wynikać z oszacowań, jakimi dysponowaliśmy, aby ją uzyskać.

Czas najwyższy odkryć karty i wyraźnie napisać to, czego większość z Was już się zapewne domyśla. Otóż całe te rozważania prowadzą do umotywowania pojęcia granicy ciągu.

**Definicja:** Liczbę rzeczywistą $g$ nazywamy granicą ciągu[10] $(a_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ |a_n-g|<\varepsilon\,.$$

*Komentarze do definicji:*

• Mam zwyczaj pisać specyfikacje pod kwantyfikatorami, a nie po nich. Uważam bowiem, że tak jest czytelniej, choć może nie do końca zgodnie z przyjętymi obyczajami.

• Zmienne $\varepsilon$ oraz $N$ przyjmują wartości rzeczywiste, a zmienna $n$ wartości naturalne. Jednak wolę napisać to obok lub zostawić w domyśle, niż dodatkowo komplikować tymi warunkami i tak już rozbudowany wzorek.

[9] Tutaj w każdym z przypadków liczba $N$ jest całkowita, ale ma to jedynie walor estetyczny. Gdyby $N$ było liczbą niecałkowitą, nic złego by się nie stało.

[10] Chodzi oczywiście o dowolny ciąg $(a_n)$, a nie tylko o ten konkretny przykład ciągu, który wcześniej sobie tak oznaczyliśmy.

W podanych szacowaniach rolę $\varepsilon$ przyjęła jedna milionowa. Wykorzystując oszacowania, któymi akurat dysponowaliśmy, byliśmy w stanie wskazać takie miejsce w ciągu, od którego począwszy[11] wyrazy różnią się na pewno o mniej niż ów $\varepsilon$ od granicy. Przyjrzyjmy się ciągowi $(h_n)$. Wykorzystując dwa różne oszacowania, a mianowicie (4) oraz (6), byliśmy w stanie uzyskać wartości:
$N = 4\,000\,000\,000\,000$ na podstawie nierówności (4),
$N = 6\,000\,000\,000$ na podstawie nierówności (6) oraz $3\,000\,000^{3/2} < 6\,000\,000\,000$.

Które $N$ jest więc dobrze dobrane do $\varepsilon = 10^{-6}$ dla ciągu $(h_n)$ ?
I jedno i drugie i każde inne większe od nich. Przypomnijmy, że według naszych wcześniejszych ustaleń

$$|h_n - 1| < \frac{1}{1\,000\,000} \qquad \text{dla } n \geqslant 4\,000\,000\,000\,000$$

$$|h_n - 1| < \frac{1}{1\,000\,000} \qquad \text{dla } n \geqslant 6\,000\,000\,000$$

ale stąd wynika także

$$|h_n - 1| < \frac{1}{1\,000\,000} \qquad \text{dla } n \geqslant 10^{2020}$$

Istotne jest tylko to, że dla każdego $\varepsilon$ istnieje **jakieś** $N$, które spełnia warunek podany dalej w definicji granicy ciągu:

$$\underset{n\geqslant N}{\forall} \; |h_n - 1| < \varepsilon\,.$$

Na koniec dzisiejszego wykładu parę drobnych uwag. Jeśli ciąg ma granicę, to nazywamy go ciągiem zbieżnym. W przeciwnym razie mówimy o ciągu rozbieżnym. Jeśli ciąg ma granicę, to jest ona jedyna — ciąg nie może być jednocześnie zbieżny do różnych granic. Jeśli ciąg $(a_n)$ jest zbieżny, to jego granicę zapisujemy[12] jako

$$\lim_{n\to\infty} a_n\,.$$

Warunek $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ możemy też zapisać[13] jako "$a_n \to g$ przy $n \to \infty$" albo po prostu jako "$a_n \to g$", gdy z oznaczeń lub kontekstu nie ma wątpliwości, że chodzi o $n$ dążące do nieskończoności.

Zgodnie z tymi oznaczeniami możemy zapisać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n = \frac{1}{2}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+n^2} - n = \frac{1}{3}\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{n^4+n^3} - n = \frac{1}{4}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,.$$

## Obejrzyj w internecie[14] wykład doc. Górniaka z PWr:

Odcinek **17:** Ciąg zbieżny - definicja granicy ciągu.

---

[11] Ale może już znacznie wcześniej — nie interesuje nas to specjalnie.
[12] A przy tym **lim** czytamy jako *limes*.
[13] Czytamy: $a_n$ dąży do $g$ przy $n$ dążącym do nieskończoności.
[14] Link do wykładów doc. Górniaka: `https://oze.pwr.edu.pl/kursy/analiza/analiza.html`