Indukcja matematyczna.

1. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1+4+9+16+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,. \tag{1}$$

Rozwiązanie:
1° Dla $n=1$ równość (1) przyjmuje postać $1=1$, jest więc prawdziwa.

2° Niech n będzie taką liczbą naturalną, że prawdziwa jest równość (1).
Udowodnimy, że wówczas

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\,. \tag{2}$$

Wychodząc od lewej strony równości (2) i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=$$

$$=\frac{n+1}{6}\cdot(n(2n+1)+6(n+1))=\frac{n+1}{6}\cdot\left(2n^2+7n+6\right)=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

co dowodzi prawdziwości (2).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej równość (1) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

2. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$1000000n<2^n+19000000\,.$$

3. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 6$ kwadrat (figurę geometryczną) można podzielić na n kwadratów.

4. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n oraz każdych liczb rzeczywistych dodatnich $a_1,a_2,\ldots,a_n$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\,.$$

5. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe jest następujące twierdzenie:
Każdych n kotów ma taki sam kolor (tzn. są nieodróżnialne, ale mogą być jednakowo łaciate).
Prosty wniosek: Wszystkie koty są takiego samego koloru.