140. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^3}+\frac{n}{n^3+1}+\frac{n}{n^3+2}+\frac{n}{n^3+3}+\frac{n}{n^3+4}+\frac{n}{n^3+5}+\frac{n}{n^3+6}+\ldots+\frac{n}{(n+1)^3}\right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n i zauważmy, że ma ona $3n^2+3n+2$ składników.

Zachodzą wówczas oszacowania od góry

$$b_n\leqslant\left(3n^2+3n+2\right)\cdot\frac{n}{n^3}=c_n$$

oraz od dołu

$$b_n\geqslant\left(3n^2+3n+2\right)\cdot\frac{n}{(n+1)^3}=a_n\,.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+3n+2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)=3$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n^2+3n+2)\cdot n}{(n+1)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}=3\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}b_n=3\,.$$

141. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^5+1}{\sqrt{18n^{18}+1}}+\frac{5n^5+2}{\sqrt{18n^{18}+2}}+\frac{5n^5+3}{\sqrt{18n^{18}+3}}+\frac{5n^5+4}{\sqrt{18n^{18}+4}}+\ldots+\frac{5n^5+4n^4}{\sqrt{18n^{18}+4n^4}}\right).$$

Rozwiązanie:

Dana pod znakiem granicy suma ma $4n^4$ składników i zapisuje się wzorem

$$b_n=\sum_{k=1}^{4n^4}\frac{5n^5+k}{\sqrt{18n^{18}+k}}\,.$$

Szacowanie od góry daje

$$\sum_{k=1}^{4n^4}\frac{5n^5+k}{\sqrt{18n^{18}+k}}\leqslant\sum_{k=1}^{4n^4}\frac{5n^5+4n^4}{\sqrt{18n^{18}+0}}=\frac{4n^4\left(5n^5+4n^4\right)}{3\sqrt{2}\cdot n^9}=c_n\,.$$

Szacując od dołu otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{4n^4}\frac{5n^5+k}{\sqrt{18n^{18}+k}}\geqslant\sum_{k=1}^{4n^4}\frac{5n^5+0}{\sqrt{18n^{18}+4n^4}}=\frac{4n^4\cdot5n^5}{\sqrt{18n^{18}+4n^4}}=a_n\,.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{20n^9}{\sqrt{18n^{18}+4n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{20}{\sqrt{18+4n^{-14}}} = \frac{20}{\sqrt{18}} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^4\cdot(5n^5+4n^4)}{3\sqrt{2}\cdot n^9} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot(5+4n^{-1})}{3\sqrt{2}} = \frac{20}{3\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{3}\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{10\sqrt{2}}{3}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica istnieje i jest równa $\frac{10\sqrt{2}}{3}$.

142. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4}{n^7+n^4}+\frac{n^4+1}{n^7+n^4+1}+\frac{n^4+2}{n^7+n^4+2}+\frac{n^4+3}{n^7+n^4+3}+\frac{n^4+4}{n^7+n^4+4}+\ldots+\frac{(n+1)^4}{n^7+(n+1)^4}\right).$$

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma $(n+1)^4-n^4+1=4n^3+6n^2+4n+2$ składników. Szacujemy ją od góry przez iloczyn liczby składników i wspólnego górnego oszacowania składników:

$$\frac{n^4}{n^7+n^4}+\frac{n^4+1}{n^7+n^4+1}+\frac{n^4+2}{n^7+n^4+2}+\ldots+\frac{(n+1)^4}{n^7+(n+1)^4} \leqslant \left(4n^3+6n^2+4n+2\right)\cdot\frac{(n+1)^4}{n^7+0}$$

i analogicznie od dołu:

$$\frac{n^4}{n^7+n^4}+\frac{n^4+1}{n^7+n^4+1}+\ldots+\frac{(n+1)^4}{n^7+(n+1)^4} \geqslant \left(4n^3+6n^2+4n+2\right)\cdot\frac{n^4}{n^7+(n+1)^4}\,.$$

Następnie kolejno obliczamy granice przy $n\to\infty$ oszacowań górnego i dolnego:

$$\frac{(4n^3+6n^2+4n+2)\cdot(n+1)^4}{n^7} = \left(4+6n^{-1}+4n^{-2}+2n^{-3}\right)\cdot\left(1+n^{-1}\right)^4 \to 4$$

oraz

$$\left(4n^3+6n^2+4n+2\right)\cdot\frac{n^4}{n^7+(n+1)^4} = \frac{4+6n^{-1}+4n^{-2}+2n^{-3}}{1+(1+n^{-1})^4\cdot n^{-3}} \to 4\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

143. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{49n^7-1}}+\frac{\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{49n^7+1}}+\frac{\sqrt{n^3+3}}{\sqrt{49n^7-1}}+\ldots+\frac{\sqrt{n^3+k}}{\sqrt{49n^7+(-1)^k}}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt{49n^7-1}}\right).$$

Rozwiązanie:

Zauważamy, że ostatni składnik danej w zadaniu sumy można zapisać jako

$$\frac{\sqrt{n^3+3n^2+3n+1}}{\sqrt{49n^7-1}},$$

skąd wynika, że ma ona $3n^2+3n+1$ składników.

Oznaczymy sumę występującą w treści zadania przez b_n i oszacujemy ją od góry przez wspólne oszacowanie składników (liczniki od góry, mianowniki od dołu) przemnożone przez liczbę składników. Oznaczymy uzyskane oszacowanie przez c_n.

$$b_n \leqslant \left(3n^2+3n+1\right)\cdot\frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt{49n^7-1}} = c_n\,.$$

Postępując analogicznie oszacujemy daną sumę od dołu przez wspólne oszacowanie składników (liczniki od dołu, mianowniki od góry) przemnożone przez liczbę składników. Oznaczymy uzyskane oszacowanie przez a_n.

$$b_n \geqslant \left(3n^2+3n+1\right)\cdot\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{49n^7+1}} = a_n\,.$$

Obliczając granice ciągów (a_n) i (c_n) otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(3n^2+3n+1\right)\cdot\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{49n^7+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(3+3n^{-1}+n^{-2}\right)\cdot\frac{\sqrt{1+n^{-3}}}{\sqrt{49+n^{-7}}} = \frac{3}{7}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\left(3n^2+3n+1\right)\cdot\frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt{49n^7-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(3+3n^{-1}+n^{-2}\right)\cdot\frac{\sqrt{\left(1+n^{-1}\right)^3}}{\sqrt{49-n^{-7}}} = \frac{3}{7}\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{3}{7}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{7}\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{7}\,.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa 3/7.

144. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{\sqrt{n^6+1}}+\frac{n^2+1}{\sqrt{(n^2+1)^3+1}}+\frac{n^2+2}{\sqrt{(n^2+2)^3+1}}+\frac{n^2+3}{\sqrt{(n^2+3)^3+1}}+\frac{n^2+4}{\sqrt{(n^2+4)^3+1}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{n^2+k}{\sqrt{(n^2+k)^3+1}}+\ldots+\frac{(n+3)^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}}\right).$$

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma $(n+3)^3-n^2+1=6n+10$ wyrazów. Szacujemy ją obustronnie:

$$(6n+10)\cdot\frac{n^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}}\leqslant\sum_{k=0}^{6n+9}\frac{n^2+k}{\sqrt{(n^2+k)^3+1}}\leqslant(6n+10)\cdot\frac{(n+3)^2}{\sqrt{n^6+1}},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$(6n+10)\cdot\frac{n^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}}=\left(6+\frac{10}{n}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{3}{n}\right)^6+\frac{1}{n^6}}}\to 6$$

oraz

$$(6n+10)\cdot\frac{(n+3)^2}{\sqrt{n^6+1}}=\left(6+\frac{10}{n}\right)\cdot\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^6}}}\to 6.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 6.

145. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{(n^2+n)^2}}+\frac{\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{(n^2+n)^2+n^2}}+\frac{\sqrt{n^2+4}}{\sqrt{(n^2+n)^2+2n^2}}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{\sqrt{(n^2+n)^2+3n^2}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+2k}}{\sqrt{(n^2+n)^2+kn^2}}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+4)^2-4}}{\sqrt{(n^2+3n)^2-2n^2}}+\frac{\sqrt{(n+4)^2-2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2-n^2}}+\frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2}}\right).$$

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2}}=\frac{\sqrt{n^2+8n+16}}{\sqrt{n^4+6n^3+9n^2}}=\frac{\sqrt{n^2+2\cdot(4n+8)}}{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+4n^3+8n^2}}=\frac{\sqrt{n^2+2\cdot(4n+8)}}{\sqrt{(n^2+n)^2+n^2\cdot(4n+8)}},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{4n+8}\frac{\sqrt{n^2+2k}}{\sqrt{(n^2+n)^2+kn^2}}$$

i w konsekwencji ma $4n+9$ składników. Szacujemy ją obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(4n+9)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2}} \leqslant \sum_{k=0}^{4n+8}\frac{\sqrt{n^2+2k}}{\sqrt{(n^2+n)^2+kn^2}} \leqslant (4n+9)\cdot\frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{(n^2+n)^2}},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$(4n+9)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2}}=\frac{(4n+9)\cdot n}{n^2+3n}=\frac{4+\frac{9}{n}}{1+\frac{3}{n}}\to 4$$

oraz

$$(4n+9)\cdot\frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{(n^2+n)^2}}=\frac{(4n+9)\cdot(n+4)}{n^2+n}=\frac{\left(4+\frac{9}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{4}{n}\right)}{1+\frac{1}{n}}\to 4\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

146. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+1}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+2}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+3}-n^2}+\ldots\right.$$
$$\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+k}-n^2}+\ldots$$
$$\left.\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+n-2}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+n-1}-n^2}+\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+n}-n^2}\right).$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy wyrażenie pod znakiem granicy (uwzględniając, że jest to suma złożona z $n+1$ składników), a następnie przechodzimy z n do $+\infty$ w oszacowaniach dolnym i górnym:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+k}-n^2}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{n^4+n^3+k}+n^2}{n^4+n^3+k-n^4}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{n^4+n^3+k}+n^2}{n^3+k},$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{n^4+n^3+k}+n^2}{n^3+k}\geqslant(n+1)\cdot\frac{\sqrt{n^4+0+0}+n^2}{n^3+n}\to 2\,,$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{n^4+n^3+k}+n^2}{n^3+k}\leqslant(n+1)\cdot\frac{\sqrt{n^4+n^3+n}+n^2}{n^3+0}\to 2\,.$$

Ponieważ oszacowania dolne i górne dążą do wspólnej granicy równej 2, na mocy twierdzenia o trzech ciągach dana w zadaniu granica istnieje i ma wartość 2.

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 2.

147. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n^2+4}+\sqrt[3]{n^2+8}+\sqrt[3]{n^2+12}+\sqrt[3]{n^2+16}+\sqrt[3]{n^2+20}+\ldots+\sqrt[3]{(n+2)^2}}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n^2+3}+\sqrt[3]{n^2+6}+\sqrt[3]{n^2+9}+\sqrt[3]{n^2+12}+\sqrt[3]{n^2+15}+\ldots+\sqrt[3]{(n+3)^2}}.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez b_n wyrażenie znajdujące się pod znakiem granicy.

Suma w liczniku tego wyrażenia zapisuje się wzorem

$$\sum_{k=0}^{n+1}\sqrt[3]{n^2+4k}\,,$$

ma więc $n+2$ składniki. Górny zakres sumowania ustaliliśmy z równości

$$n^2+4k=(n+2)^2=n^2+4n+4=n^2+4(n+1)$$

otrzymanej dla wyrażenia pod pierwiastkiem ostatniego składnika sumy.

Podobnie, suma w mianowniku wyrażenia b_n zapisuje się wzorem

$$\sum_{k=0}^{2n+3}\sqrt[3]{n^2+3k}\,,$$

ma więc $2n+4$ składniki. Górny zakres sumowania ustaliliśmy z równości

$$n^2+3k=(n+3)^2=n^2+6n+9=n^2+3(2n+3)$$

otrzymanej dla wyrażenia pod pierwiastkiem ostatniego składnika sumy.

Szacowanie od góry daje

$$b_n\leqslant\frac{(n+2)\cdot\sqrt[3]{(n+2)^2}}{(2n+4)\cdot\sqrt[3]{n^2}}=\frac{\sqrt[3]{(n+2)^2}}{2\cdot\sqrt[3]{n^2}}=c_n\,.$$

Szacując od dołu otrzymujemy

$$b_n\geqslant\frac{(n+2)\cdot\sqrt[3]{n^2}}{(2n+4)\cdot\sqrt[3]{(n+3)^2}}=\frac{\sqrt[3]{n^2}}{2\cdot\sqrt[3]{(n+3)^2}}=a_n\,.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{2\cdot\sqrt[3]{(n+3)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}}=\frac{1}{2}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{(n+2)^2}}{2\cdot\sqrt[3]{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}}{2}=\frac{1}{2}\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{2}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica istnieje i jest równa 1/2.

148. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{k\cdot n^k+1}}{n^7+1}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+2}}{n^7+4}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+3}}{n^7+9}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+4}}{n^7+16}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+5}}{n^7+25}+\ldots+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^3}}{n^7+n^6}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma n^3 wyrazów. Szacujemy ją obustronnie:

$$n^3\cdot\frac{\sqrt{k\cdot n^k+0}}{n^7+n^6}\leqslant\frac{\sqrt{k\cdot n^k+1}}{n^7+1}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+2}}{n^7+4}+\ldots+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^3}}{n^7+n^6}\leqslant n^3\cdot\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^3}}{n^7+0},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego.

$$n^3\cdot\frac{\sqrt{k\cdot n^k+0}}{n^7+n^6}=\frac{\sqrt{k\cdot n^k}}{n^4+n^3}=\frac{\sqrt{k}\cdot n^{k/2}}{n^4+n^3}=\frac{\sqrt{k}\cdot n^{k/2-4}}{1+\frac{1}{n}}\to\sqrt{k},$$

o ile $k/2-4=0$, czyli $k=8$.

$$n^3\cdot\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^3}}{n^7}=\sqrt{k\cdot n^{k/2-4}+\frac{1}{n^5}}\to\sqrt{k},$$

o ile $k/2-4=0$, czyli $k=8$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $k=8$ granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

149. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^p+1}{\sqrt{900n^{900}+1}}+\frac{n^p+8}{\sqrt{900n^{900}+32}}+\ldots+\frac{n^p+k^3}{\sqrt{900n^{900}+k^5}}+\ldots+\frac{n^p+8n^{18}}{\sqrt{900n^{900}+32n^{30}}}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru p, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma $2n^6$ składników. Szacujemy ją obustronnie:

$$2n^6\cdot\frac{n^p+0}{\sqrt{900n^{900}+32n^{30}}}\leqslant\sum_{k=1}^{2n^6}\frac{n^p+k^3}{\sqrt{900n^{900}+k^5}}\leqslant 2n^6\cdot\frac{n^p+8n^{18}}{\sqrt{900n^{900}+0}}=2n^6\cdot\frac{n^p+8n^{18}}{30n^{450}},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego.

$$2n^6\cdot\frac{n^p+0}{\sqrt{900n^{900}+32n^{30}}}=\frac{2n^{p+6}}{\sqrt{900n^{900}+32n^{30}}}=\frac{2n^{p-444}}{\sqrt{900+32n^{-870}}}\to\frac{2\cdot 1}{\sqrt{900+0}}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15},$$

o ile $p-444=0$, czyli $p=444$.

$$2n^6\cdot\frac{n^p+8n^{18}}{30n^{450}}=\frac{2n^{p+6}+16n^{24}}{30n^{450}}=\frac{2n^{p-444}+16n^{-426}}{30}\to\frac{2\cdot 1+0}{30}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15},$$

o ile $p-444=0$, czyli $p=444$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $p=444$ dana w zadaniu granica jest równa $1/15$.

150. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+1}}{n^{13}+1}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+2}}{n^{13}+4}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+3}}{n^{13}+9}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+4}}{n^{13}+16}+\ldots+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+n^4}}{n^{13}+n^8}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma n^4 wyrazów. Szacujemy ją obustronnie:

$$n^4\cdot\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+0}}{n^{13}+n^8}\leqslant\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+1}}{n^{13}+1}+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+2}}{n^{13}+4}+\ldots+\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+n^4}}{n^{13}+n^8}\leqslant n^4\cdot\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+n^4}}{n^{13}+0},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

$$n^4\cdot\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+0}}{n^{13}+n^8}=\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k}}{n^9+n^4}=\frac{\sqrt[3]{k}\cdot n^{k/3}}{n^9+n^4}=\frac{\sqrt[3]{k}\cdot n^{k/3-9}}{1+\frac{1}{n^5}}\to\sqrt[3]{k},$$

o ile $k/3-9=0$, czyli $k=27$.

$$n^4\cdot\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+n^4}}{n^{13}}=\frac{\sqrt[3]{k\cdot n^k+n^4}}{n^9}=\sqrt[3]{k\cdot n^{k-27}+\frac{1}{n^{23}}}\to\sqrt[3]{k},$$

o ile $k-27=0$, czyli $k=27$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $k=27$ granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 3.

151. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{k\cdot n^k+1}}{n^{13}+1}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+2}}{n^{13}+2}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+3}}{n^{13}+3}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+4}}{n^{13}+4}+\ldots+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^5}}{n^{13}+n^5}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma n^5 wyrazów. Szacujemy ją obustronnie:

$$n^5\cdot\frac{\sqrt{k\cdot n^k+0}}{n^{13}+n^5}\leqslant\frac{\sqrt{k\cdot n^k+1}}{n^{13}+1}+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+2}}{n^{13}+2}+\ldots+\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^5}}{n^{13}+n^5}\leqslant n^5\cdot\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^5}}{n^{13}+0},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

$$n^5\cdot\frac{\sqrt{k\cdot n^k+0}}{n^{13}+n^5}=\frac{\sqrt{k\cdot n^k}}{n^8+1}=\frac{\sqrt{k}\cdot n^{k/2}}{n^8+1}=\frac{\sqrt{k}\cdot n^{k/2-8}}{1+\frac{1}{n^8}}\to\sqrt{k},$$

o ile $k/2-8=0$, czyli $k=16$.

$$n^5\cdot\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^5}}{n^{13}+0}=\frac{\sqrt{k\cdot n^k+n^5}}{n^8}=\sqrt{k\cdot n^{k-16}+\frac{1}{n^{11}}}\to\sqrt{k},$$

o ile $k-16=0$, czyli $k=16$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $k=16$ granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

152. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4}{n^k+n^4}+\frac{n^4+1}{n^k+n^4+1}+\frac{n^4+2}{n^k+n^4+2}+\frac{n^4+3}{n^k+n^4+3}+\frac{n^4+4}{n^k+n^4+4}+\ldots+\frac{(n+1)^4}{n^k+(n+1)^4}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k, aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma $(n+1)^4-n^4+1=4n^3+6n^2+4n+2$ składników. Szacujemy ją od góry przez iloczyn liczby składników i wspólnego gornego oszacowania składników:

$$\frac{n^4}{n^k+n^4}+\frac{n^4+1}{n^k+n^4+1}+\frac{n^4+2}{n^k+n^4+2}+\ldots+\frac{(n+1)^4}{n^k+(n+1)^4}\leqslant\left(4n^3+6n^2+4n+2\right)\cdot\frac{(n+1)^4}{n^k+0}$$

i analogicznie od dołu:

$$\frac{n^4}{n^k+n^4}+\frac{n^4+1}{n^k+n^4+1}+\ldots+\frac{(n+1)^4}{n^k+(n+1)^4}\geqslant\left(4n^3+6n^2+4n+2\right)\cdot\frac{n^4}{n^k+(n+1)^4}\,.$$

Następnie kolejno obliczamy granice przy $n\to\infty$ oszacowań górnego i dolnego.

$$\frac{(4n^3+6n^2+4n+2)\cdot(n+1)^4}{n^k}=\frac{(4+6n^{-1}+4n^{-2}+2n^{-3})\cdot\left(1+n^{-1}\right)^4}{n^{k-7}}\to 4\,,$$

o ile $k=7$.

$$\left(4n^3+6n^2+4n+2\right)\cdot\frac{n^4}{n^k+(n+1)^4}=\frac{4+6n^{-1}+4n^{-2}+2n^{-3}}{n^{k-7}+\left(1+n^{-1}\right)^4\cdot n^{-3}}\to 4\,,$$

o ile $k=7$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $k=7$ granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

153. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n^2}^{n^3}\frac{\sqrt{n^p+k}}{n^7+k^2}$$

dobierając tak wartość parametru p, aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n i zauważmy, że ma ona n^3-n^2+1 składników.

Zachodzą wówczas oszacowania od góry

$$b_n\leqslant\left(n^3-n^2+1\right)\cdot\frac{\sqrt{n^p+n^3}}{n^7+n^4}=\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^{p-8}+\frac{1}{n^5}}}{1+\frac{1}{n^3}}=c_n$$

oraz od dołu

$$b_n\geqslant\left(n^3-n^2+1\right)\cdot\frac{\sqrt{n^p+n^2}}{n^7+n^6}=\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^{p-8}+\frac{1}{n^6}}}{1+\frac{1}{n}}=a_n\,.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto dla $p=8$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 1$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 1\,.$$

Odpowiedź: Dla $p=8$ wartość granicy jest równa 1.

154. a) Dobrać takie liczby całkowite $A>0$ i $B>1$, aby zadanie **b)** miało sens.
b) Obliczyć granicę ciągu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2}+\frac{\sqrt{n^2+3}}{(n+1)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+1)^2+4}+\frac{\sqrt{n^2+9}}{(n+1)^2+6}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-4}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-3}}{(n+B)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}\right)$$

dla A i B dobranych w zadaniu **a)**.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}=\frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+2Bn+B^2}=\frac{\sqrt{n^2+3\cdot\frac{2An+A^2}{3}}}{n^2+2n+1+2\cdot\frac{2(B-1)n+B^2-1}{2}},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)}\frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k}\,, \tag{1}$$

gdzie

$$N(n)=\frac{2An+A^2}{3}=\frac{2(B-1)n+B^2-1}{2}\,, \tag{2}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (2) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B, aby prawe równanie (2) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n, dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$2\cdot\left(2An+A^2\right)=3\cdot\left(2(B-1)n+B^2-1\right)\,,$$
$$4An+2A^2=6(B-1)n+3\left(B^2-1\right)\,. \tag{3}$$

Aby równość (3) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n, odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 4A &= 6(B-1)\\ 2A^2 &= 3\left(B^2-1\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2A &= 3(B-1)\\ 2A^2 &= 3(B-1)(B+1)\end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy $A=B+1$, co po podstawieniu do równania pierwszego daje
$$2B+2=3B-3\,,$$
skąd $B=5$ i $A=6$. Wstawiając te wartości do równości (2) otrzymujemy
$$N(n)=4n+12\,.$$
Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $4n+13$ składników.

Przystępując do rozwiązania właściwej części zadania szacujemy sumę (1) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:
$$(4n+13)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+5)^2} \leqslant \sum_{k=0}^{4n+12}\frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k} \leqslant (4n+13)\cdot\frac{\sqrt{(n+6)^2}}{(n+1)^2}\,,$$
a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy
$$(4n+13)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+5)^2}=\frac{(4n+13)\cdot n}{(n+5)^2}=\frac{4+\frac{13}{n}}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}\to 4$$
oraz
$$(4n+13)\cdot\frac{\sqrt{(n+6)^2}}{(n+1)^2}=\frac{(4n+13)\cdot(n+6)}{(n+1)^2}=\frac{\left(4+\frac{13}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{6}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\to 4\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=6$, $B=5$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 4.

155. Obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+3)^2}+\frac{\sqrt{n^2+5}}{(n+3)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+10}}{(n+3)^2+4}+\frac{\sqrt{n^2+15}}{(n+3)^2+6}+\frac{\sqrt{n^2+20}}{(n+3)^2+8}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+3)^2+2k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-15}}{(n+B)^2-6}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-10}}{(n+B)^2-4}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-5}}{(n+B)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}\right)$$
dla tak dobranych liczb całkowitych $A>0$ i $B>3$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako
$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}=\frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+2Bn+B^2}=\frac{\sqrt{n^2+5\cdot\frac{2An+A^2}{5}}}{n^2+6n+9+2(B-3)n+B^2-9}=$$
$$=\frac{\sqrt{n^2+5\cdot\frac{2An+A^2}{5}}}{(n+3)^2+2\cdot\left((B-3)n+\frac{B^2-9}{2}\right)},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)} \frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+3)^2+2k}\,, \tag{4}$$

gdzie

$$N(n)=\frac{2An+A^2}{5}=(B-3)n+\frac{B^2-9}{2}\,, \tag{5}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (5) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B, aby prawe równanie (5) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n, dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$2\cdot\left(2An+A^2\right)=5\cdot\left(2(B-3)n+B^2-9\right)\,,$$

$$4An+2A^2=10(B-3)n+5\left(B^2-9\right)\,. \tag{6}$$

Aby równość (6) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n, odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 4A &= 10(B-3) \\ 2A^2 &= 5\,(B^2-9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2A &= 5(B-3) \\ 2A^2 &= 5\,(B-3)\,(B+3) \end{cases} \tag{7}$$

Dzieląc drugie równanie układu (7) przez pierwsze (w którym zgodnie z założonymi nierównościami $A>0$ i $B>3$ obie strony są dodatnie, a więc różne od zera) otrzymujemy $A=B+3$, co po podstawieniu do równania pierwszego daje

$$2B+6=5B-15\,,$$

skąd $B=7$ i $A=10$. Wstawiając te wartości do równości (5) otrzymujemy

$$N(n)=4n+20\,.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $4n+21$ składników.

Przystępując do rozwiązania głównej części zadania szacujemy sumę (4) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(4n+21)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+7)^2} \leqslant \sum_{k=0}^{4n+21} \frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+3)^2+2k} \leqslant (4n+21)\cdot\frac{\sqrt{(n+10)^2}}{(n+3)^2}\,,$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$(4n+21)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+7)^2}=\frac{(4n+21)\cdot n}{(n+7)^2}=\frac{4+\frac{21}{n}}{\left(1+\frac{7}{n}\right)^2}\to 4$$

oraz

$$(4n+21)\cdot\frac{\sqrt{(n+10)^2}}{(n+3)^2}=\frac{(4n+21)\cdot(n+10)}{(n+3)^2}=\frac{\left(4+\frac{21}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{10}{n}\right)}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}\to 4\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=10$, $B=7$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 4.

156. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+B)^2}+\frac{\sqrt{n^2+3}}{(n+B)^2+1}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+B)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+9}}{(n+B)^2+3}+\frac{\sqrt{n^2+12}}{(n+B)^2+4}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+B)^2+k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-9}}{(n+6)^2-3}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+6)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-3}}{(n+6)^2-1}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+6)^2}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A>0$ i $B<6$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+6)^2}=\frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+12n+36}=\frac{\sqrt{n^2+3\cdot\frac{2An+A^2}{3}}}{n^2+2Bn+B^2+(2(6-B)n+36-B^2)},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)}\frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+B)^2+k}, \tag{8}$$

gdzie

$$N(n)=\frac{2An+A^2}{3}=2(6-B)n+36-B^2, \tag{9}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (9) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B, aby prawe równanie (9) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n, dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$2An+A^2=3\cdot\left(2(6-B)n+36-B^2\right),$$
$$2An+A^2=6(6-B)n+3\left(36-B^2\right). \tag{10}$$

Aby równość (10) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n, odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2A &= 6(6-B)\\ A^2 &= 3(36-B^2)\end{cases}$$

$$\begin{cases} A &= 3(6-B)\\ A^2 &= 3(6-B)(6+B)\end{cases}$$

Dzieląc stronami drugie równanie przez pierwsze[1] otrzymujemy $A=6+B$, co po podstawieniu do równania pierwszego daje

$$6+B=18-3B,$$

[1] Z warunków podanych w treści zadania $A>0$ i $B<6$, skąd wynika, że obie strony pierwszego równania są dodatnie, a więc niezerowe.

skąd $B=3$ i $A=9$. Wstawiając te wartości do równości (9) otrzymujemy

$$N(n)=6n+27\,.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $6n+28$ składników.

Przystępując do rozwiązania właściwej części zadania szacujemy sumę (8) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(6n+28)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+6)^2} \leqslant \sum_{k=0}^{6n+27}\frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+3)^2+k} \leqslant (6n+28)\cdot\frac{\sqrt{(n+9)^2}}{(n+3)^2}\,,$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$(6n+28)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+6)^2}=\frac{(6n+28)\cdot n}{(n+6)^2}=\frac{6+\frac{28}{n}}{\left(1+\frac{6}{n}\right)^2}\to 6$$

oraz

$$(6n+28)\cdot\frac{\sqrt{(n+9)^2}}{(n+3)^2}=\frac{(6n+28)\cdot(n+9)}{(n+3)^2}=\frac{\left(6+\frac{28}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{9}{n}\right)}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}\to 6\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 6.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=9$, $B=3$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 6.

157. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2\cdot\sqrt{(n+A)^2}}+\frac{n^2+5}{n^2\cdot\sqrt{(n+A)^2+2}}+\frac{n^2+10}{n^2\cdot\sqrt{(n+A)^2+4}}+\frac{n^2+15}{n^2\cdot\sqrt{(n+A)^2+6}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{n^2+5k}{n^2\cdot\sqrt{(n+A)^2+2k}}+\ldots+\frac{(n+10)^2-10}{n^2\cdot\sqrt{(n+B)^2-4}}+\frac{(n+10)^2-5}{n^2\cdot\sqrt{(n+B)^2-2}}+\frac{(n+10)^2}{n^2\cdot\sqrt{(n+B)^2}}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych dodatnich $A<B$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{(n+10)^2}{n^2\cdot\sqrt{(n+B)^2}}=\frac{n^2+20n+100}{n^2\cdot\sqrt{n^2+2Bn+B^2}}=\frac{n^2+5\cdot(4n+20)}{n^2\cdot\sqrt{n^2+2An+A^2+2(B-A)n+B^2-A^2}}=$$
$$=\frac{n^2+5\cdot(4n+20)}{n^2\cdot\sqrt{(n+A)^2+2\cdot\left((B-A)n+\frac{B^2-A^2}{2}\right)}}\,,$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)}\frac{n^2+5k}{n^2\cdot\sqrt{(n+A)^2+2k}}\,, \tag{11}$$

gdzie

$$N(n) = 4n + 20 = (B - A)n + \frac{B^2 - A^2}{2}, \tag{12}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1=4n+21$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (12) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B, aby prawe równanie (12) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n, dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$4n + 20 = (B - A)n + \frac{B^2 - A^2}{2},$$

$$8n + 40 = 2(B - A)n + B^2 - A^2. \tag{13}$$

Aby równość (13) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n, odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 8 & = & 2(B - A) \\ 40 & = & B^2 - A^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 4 & = & B - A \\ 40 & = & (B - A)(B + A) \end{array} \right. \tag{14}$$

Dzieląc drugie równanie układu (14) przez pierwsze (w którym zgodnie z założoną nierównością $A < B$ obie strony są dodatnie, a więc różne od zera) otrzymujemy

$$10 = B + A,$$

skąd $A = 3$ i $B = 7$.

Przystępując do rozwiązania głównej części zadania szacujemy sumę (11) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(4n + 21) \cdot \frac{n^2}{n^2 \cdot (n + 7)} \leqslant \sum_{k=0}^{4n+20} \frac{n^2 + 5k}{n^2 \cdot \sqrt{(n + 3)^2 + 2k}} \leqslant (4n + 21) \cdot \frac{(n + 10)^2}{n^2 \cdot (n + 3)},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \to +\infty$.

Otrzymujemy

$$(4n + 21) \cdot \frac{n^2}{n^2 \cdot (n + 7)} = \frac{4 + \frac{21}{n}}{1 + \frac{7}{n}} \to 4$$

oraz

$$(4n + 21) \cdot \frac{(n + 10)^2}{n^2 \cdot (n + 3)} = \frac{\left(4 + \frac{21}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{10}{n}\right)^2}{1 + \frac{3}{n}} \to 4.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A = 3$, $B = 7$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 4.

158. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2}+\frac{\sqrt{n^2+5}}{(n+1)^2+3}+\frac{\sqrt{n^2+10}}{(n+1)^2+6}+\frac{\sqrt{n^2+15}}{(n+1)^2+9}+\frac{\sqrt{n^2+20}}{(n+1)^2+12}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+1)^2+3k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-15}}{(n+B)^2-9}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-10}}{(n+B)^2-6}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-5}}{(n+B)^2-3}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A>0$ i $B>1$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}=\frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+2Bn+B^2}=\frac{\sqrt{n^2+5\cdot\frac{2An+A^2}{5}}}{n^2+2n+1+2(B-1)n+B^2-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{n^2+5\cdot\frac{2An+A^2}{5}}}{(n+1)^2+3\cdot\frac{2(B-1)n+B^2-1}{3}},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)}\frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+1)^2+3k}, \tag{15}$$

gdzie

$$N(n)=\frac{2An+A^2}{5}=\frac{2(B-1)n+B^2-1}{3}, \tag{16}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (16) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B, aby prawe równanie (16) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n, dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$3\cdot\left(2An+A^2\right)=5\cdot\left(2(B-1)n+B^2-1\right),$$

$$6An+3A^2=10(B-1)n+5\left(B^2-1\right). \tag{17}$$

Aby równość (17) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n, odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 6A &=& 10(B-1)\\ 3A^2 &=& 5\left(B^2-1\right)\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3A &=& 5(B-1)\\ 3A^2 &=& 5(B-1)(B+1)\end{array}\right. \tag{18}$$

Dzieląc drugie równanie układu (18) przez pierwsze (w którym zgodnie z założonymi nierównościami $A>0$ i $B>1$ obie strony są dodatnie, a więc różne od zera) otrzymujemy $A=B+1$, co po podstawieniu do równania pierwszego daje

$$3B+3=5B-5,$$

skąd $B=4$ i $A=5$. Wstawiając te wartości do równości (16) otrzymujemy

$$N(n)=2n+5.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $2n+6$ składników.

Przystępując do rozwiązania głównej części zadania szacujemy sumę (15) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(2n+6)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+4)^2} \leqslant \sum_{k=0}^{2n+5}\frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+1)^2+3k} \leqslant (2n+6)\cdot\frac{\sqrt{(n+5)^2}}{(n+1)^2},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$(2n+6)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+4)^2}=\frac{(2n+6)\cdot n}{(n+4)^2}=\frac{2+\frac{6}{n}}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^2}\to 2$$

oraz

$$(2n+6)\cdot\frac{\sqrt{(n+5)^2}}{(n+1)^2}=\frac{(2n+6)\cdot(n+5)}{(n+1)^2}=\frac{\left(2+\frac{6}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{5}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\to 2\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 2.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=5$, $B=4$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 2.

159. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+2)^2}+\frac{\sqrt{n^2+2}}{(n+2)^2+1}+\frac{\sqrt{n^2+4}}{(n+2)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+2)^2+3}+\frac{\sqrt{n^2+8}}{(n+2)^2+4}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+2)^2+k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-3}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-4}}{(n+B)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-2}}{(n+B)^2-1}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A>0$ i $B>2$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}=\frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+2Bn+B^2}=\frac{\sqrt{n^2+2\cdot\frac{2An+A^2}{2}}}{n^2+4n+4+2(B-2)n+B^2-4}=$$
$$=\frac{\sqrt{n^2+2\cdot\frac{2An+A^2}{2}}}{(n+2)^2+2(B-2)n+B^2-4},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)}\frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+2)^2+k}\,, \tag{19}$$

gdzie

$$N(n)=\frac{2An+A^2}{2}=2(B-2)n+B^2-4\,, \tag{20}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (20) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B, aby prawe równanie (20) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n, dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$2An+A^2=2\cdot\left(2(B-2)n+B^2-4\right),$$

$$2An+A^2=4(B-2)n+2B^2-8. \tag{21}$$

Aby równość (21) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n, odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2A & = & 4(B-2) \\ A^2 & = & 2B^2-8 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} A & = & 2(B-2) \\ A^2 & = & 2(B-2)(B+2) \end{array}\right. \tag{22}$$

Dzieląc drugie równanie układu (22) przez pierwsze (w którym zgodnie z założonymi nierównościami $A>0$ i $B>2$ obie strony są dodatnie, a więc różne od zera) otrzymujemy $A=B+2$, co po podstawieniu do równania pierwszego daje

$$B+2=2B-4,$$

skąd $B=6$ i $A=8$. Wstawiając te wartości do równości (20) otrzymujemy

$$N(n)=8n+32.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $8n+33$ składniki.

Przystępując do rozwiązania głównej części zadania szacujemy sumę (19) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(8n+33)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+6)^2} \leqslant \sum_{k=0}^{8n+32}\frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+2)^2+k} \leqslant (8n+33)\cdot\frac{\sqrt{(n+8)^2}}{(n+2)^2},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$(8n+33)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+6)^2}=\frac{(8n+33)\cdot n}{(n+6)^2}=\frac{8+\frac{33}{n}}{\left(1+\frac{6}{n}\right)^2}\to 8$$

oraz

$$(8n+33)\cdot\frac{\sqrt{(n+8)^2}}{(n+2)^2}=\frac{(8n+33)\cdot(n+8)}{(n+2)^2}=\frac{\left(8+\frac{33}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{8}{n}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}\to 8.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 8.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=8$, $B=6$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 8.

160. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+A)^2}+\frac{\sqrt{n^2+7}}{(n+A)^2+1}+\frac{\sqrt{n^2+14}}{(n+A)^2+2}+\frac{\sqrt{n^2+21}}{(n+A)^2+3}+\frac{\sqrt{n^2+28}}{(n+A)^2+4}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+A)^2+k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+7)^2-21}}{(n+B)^2-3}+\frac{\sqrt{(n+7)^2-14}}{(n+B)^2-2}+\frac{\sqrt{(n+7)^2-7}}{(n+B)^2-1}+\frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+B)^2}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A<B$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+B)^2}=\frac{\sqrt{n^2+14n+49}}{n^2+2Bn+B^2}=\frac{\sqrt{n^2+7\cdot(2n+7)}}{n^2+2An+A^2+(2(B-A)n+B^2-A^2)},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)}\frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+A)^2+k}\,, \tag{23}$$

gdzie

$$N(n)=2n+7=2(B-A)n+B^2-A^2\,, \tag{24}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1=2n+8$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (24) muszą być równe.

Aby prawa równość (24) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n, odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2 = 2\cdot(B-A) \\ 7 = B^2-A^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = B-A \\ 7 = (B-A)\cdot(B+A) \end{cases}$$

Dzieląc stronami drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy $7=A+B$, co prowadzi do $A=3$ i $B=4$.

Przystępując do rozwiązania właściwej części zadania szacujemy sumę (23) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(2n+8)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+4)^2}\quad\leqslant\quad\sum_{k=0}^{2n+7}\frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+3)^2+k}\quad\leqslant\quad(2n+8)\cdot\frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+3)^2}\,,$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$(2n+8)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+4)^2}=\frac{(2n+8)\cdot n}{(n+4)^2}=\frac{2+\frac{8}{n}}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^2}\to 2$$

oraz

$$(2n+8)\cdot\frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+3)^2}=\frac{(2n+8)\cdot(n+7)}{(n+3)^2}=\frac{\left(2+\frac{8}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{7}{n}\right)}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}\to 2\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 2.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=3$, $B=4$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 2.