

123. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6 + n^5 + 1} - n^3}{\sqrt[4]{n^6 + n^5 + 1} - n^2}.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ w liczniku ułamka pod znakiem granicy występuje różnica wyrażeń podobnej wielkości ($\approx n^3$), stosujemy na poziomie licznika wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}.$$

Ponieważ w mianowniku tegoż ułamka występuje różnica wyrażeń **różnego rzędu wielkości** ($\approx n^{3/2}$ oraz $\approx n^2$), stosowanie jakiegokolwiek wzoru skróconego mnożenia jest zbyteczne, a nawet szkodliwe, bo prowadzi do skomplikowania rachunków.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6 + n^5 + 1} - n^3}{\sqrt[4]{n^6 + n^5 + 1} - n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 + n^5 + 1 - n^6}{(\sqrt[4]{n^6 + n^5 + 1} - n^2) \cdot (\sqrt{n^6 + n^5 + 1} + n^3)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 1}{(\sqrt[4]{n^6 + n^5 + 1} - n^2) \cdot (\sqrt{n^6 + n^5 + 1} + n^3)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n^{-5}}{(\sqrt[4]{n^{-2} + n^{-3} + n^{-8}} - 1) \cdot (\sqrt{1 + n^{-1} + n^{-6}} + 1)} = \\ &= \frac{1 + 0}{(\sqrt[4]{0 + 0 + 0} - 1) \cdot (\sqrt{1 + 0 + 0} + 1)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość $-1/2$.

124. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^{16} + n^3} - n^8)^3}{(\sqrt{n^{16} + n^5} - n^8)^5}.$$

Rozwiązanie:

Stosując dwukrotnie (raz na poziomie licznika i raz na poziomie mianownika) wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^{16} + n^3} - n^8)^3}{(\sqrt{n^{16} + n^5} - n^8)^5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{\sqrt{n^{16} + n^3} + n^8} \right)^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{n^{16} + n^5} + n^8}{n^5} \right)^5 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^{-5}}{\sqrt{1 + n^{-13}} + 1} \right)^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + n^{-11}} + 1}{n^{-3}} \right)^5 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1 + n^{-11}} + 1)^5}{(\sqrt{1 + n^{-13}} + 1)^3} \cdot \frac{n^{-15}}{n^{-15}} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1+n^{-11}}+1)^5}{(\sqrt{1+n^{-13}}+1)^3} = \frac{(\sqrt{1+0}+1)^5}{(\sqrt{1+0}+1)^3} = \frac{2^5}{2^3} = 4.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 4.

125. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{n^{18}+n^7}-n^6)^2}{(\sqrt{n^{18}+n^7}-n^9)^5}.$$

Rozwiązanie:

Stosując w mianowniku wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b = \frac{a^2-b^2}{a+b},$$

a w liczniku wzór na różnicę sześcianów w postaci

$$a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{n^{18}+n^7}-n^6)^2}{(\sqrt{n^{18}+n^7}-n^9)^5} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^7}{(n^{18}+n^7)^{2/3}+n^6 \cdot (n^{18}+n^7)^{1/3}+n^{12}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{n^{18}+n^7}+n^9}{n^7} \right)^5 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^{-5}}{(1+n^{-11})^{2/3}+(1+n^{-11})^{1/3}+1} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{1+n^{-11}}+1}{n^{-2}} \right)^5 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1+n^{-11}}+1)^5}{((1+n^{-11})^{2/3}+(1+n^{-11})^{1/3}+1)^2} \cdot \frac{n^{-10}}{n^{-10}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1+n^{-11}}+1)^5}{((1+n^{-11})^{2/3}+(1+n^{-11})^{1/3}+1)^2} = \frac{(\sqrt{1+0}+1)^5}{((1+0)^{2/3}+(1+0)^{1/3}+1)^2} = \frac{2^5}{3^2} = \frac{32}{9}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 32/9.

126. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{12}+n}-n^6}{(\sqrt{n^4+n}-n^2)^k}$$

dla tak dobranej wartości parametru k , aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Stosując dwukrotnie (raz na poziomie licznika i raz na poziomie mianownika) wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{12}+n}-n^6}{(\sqrt{n^4+n}-n^2)^k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^{12}+n+n^6}} \cdot \left(\frac{\sqrt{n^4+n+n^2}}{n} \right)^k = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-5}}{\sqrt{1+n^{-11}+1}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+n^{-3}+1}}{n^{-1}} \right)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1+n^{-3}+1})^k}{\sqrt{1+n^{-11}+1}} \cdot \frac{n^{-5}}{n^{-k}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1+n^{-3}+1})^k}{\sqrt{1+n^{-11}+1}} \cdot n^{k-5} = \frac{2^k}{2} = 2^{k-1}, \end{aligned}$$

o ile $k-5=0$, czyli $k=5$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 16 dla $k=5$.

127. Wskazać liczbę naturalną k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{14}+9n^9+1}-n^7}{n^k}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów przepisujemy występujące pod znakiem granicy wyrażenie w postaci niezawierającej w liczniku różnicy wyrażeń zbliżonej wielkości, a następnie dzielimy licznik i mianownik przez n^9 :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{14}+9n^9+1}-n^7}{n^k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^9+1}{n^k \cdot (\sqrt{n^{14}+9n^9+1}+n^7)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9+n^{-9}}{n^{k-2} \cdot (\sqrt{1+9n^{-5}+n^{-14}+1})}. \end{aligned}$$

Dla $k=2$ otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9+n^{-9}}{\sqrt{1+9n^{-5}+n^{-14}+1}} = \frac{9+0}{\sqrt{1+0+0+1}} = \frac{9}{2}.$$

Odpowiedź: Przy $k=2$ granica jest równa $9/2$.

Uwaga: Liczba $k=2$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania. Jednak zgodnie z poleceniem wystarczyło wskazać k , bez konieczności uzasadnienia, że takie k jest tylko jedno.

128. Wskazać liczbę rzeczywistą k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot (\sqrt{n^{666}+1}-n^{333}) \right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów w postaci $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$ przekształcamy daną w treści zadania granicę w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n^k \cdot (\sqrt{n^{666} + 1} - n^{333})) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \frac{1}{\sqrt{n^{666} + 1} + n^{333}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{\sqrt{n^{666} + 1} + n^{333}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n^{333} \cdot (\sqrt{1 + n^{-666}} + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k-333}}{\sqrt{1 + n^{-666}} + 1}. \end{aligned}$$

Mianownik ostatniego wyrażenia pod znakiem granicy dąży do 2 przy n dążącym do nieskończoności, natomiast licznik jest równy 1, gdy $k = 333$. Dla $k = 333$ mamy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k-333}}{\sqrt{1 + n^{-666}} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + n^{-666}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: Dla $k = 333$ dana w zadaniu granica ma wartość $1/2$.

129. Wskazać liczbę rzeczywistą k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^k \cdot (\sqrt[4]{n^{888} + 1} - n^{222}))$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b} = \frac{a^4 - b^4}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2)}$$

przekształcamy daną w treści zadania granicę w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n^k \cdot (\sqrt[4]{n^{888} + 1} - n^{222})) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \frac{1}{(\sqrt[4]{n^{888} + 1} + n^{222}) \cdot (\sqrt{n^{888} + 1} + n^{444})} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(\sqrt[4]{n^{888} + 1} + n^{222}) \cdot (\sqrt{n^{888} + 1} + n^{444})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n^{666} \cdot (\sqrt[4]{1 + n^{-888}} + 1) \cdot (\sqrt{1 + n^{-888}} + 1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k-666}}{(\sqrt[4]{1 + n^{-888}} + 1) \cdot (\sqrt{1 + n^{-888}} + 1)}. \end{aligned}$$

Mianownik ostatniego wyrażenia pod znakiem granicy dąży do 4 przy n dążącym do nieskończoności, natomiast licznik jest równy 1, gdy $k = 666$. Dla $k = 666$ mamy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k-666}}{(\sqrt[4]{1 + n^{-888}} + 1) \cdot (\sqrt{1 + n^{-888}} + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[4]{1 + n^{-888}} + 1) \cdot (\sqrt{1 + n^{-888}} + 1)} = \frac{1}{4}.$$

Odpowiedź: Dla $k = 666$ dana w zadaniu granica ma wartość $1/4$.

130. Wskazać liczbę rzeczywistą k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^{666} + n^k} - n^{222})$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę sześciątów w postaci

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$$

przekształcamy daną w treści zadania granicę w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^{666} + n^k} - n^{222}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(n^{666} + n^k)^{2/3} + n^{222} \cdot (n^{666} + n^k)^{1/3} + n^{444}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k-444}}{(1 + n^{k-666})^{2/3} + (1 + n^{k-666})^{1/3} + 1}. \end{aligned}$$

Mianownik ostatniego wyrażenia pod znakiem granicy dąży do 3 przy n dążącym do nieskończoności (o ile $k < 666$), natomiast licznik jest równy 1, gdy $k = 444$.

Dla $k = 444$ mamy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k-444}}{(1 + n^{k-666})^{2/3} + (1 + n^{k-666})^{1/3} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + n^{-222})^{2/3} + (1 + n^{-222})^{1/3} + 1} = \frac{1}{3}.$$

Odpowiedź: Dla $k = 444$ dana w zadaniu granica ma wartość $1/3$.

131. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + 6n^3} - n^2 - 3n).$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + 6n^3} - n^2 - 3n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + 6n^3} - (n^2 + 3n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 6n^3 - (n^2 + 3n)^2}{\sqrt{n^4 + 6n^3} + n^2 + 3n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 6n^3 - n^4 - 6n^3 - 9n^2}{\sqrt{n^4 + 6n^3} + n^2 + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-9n^2}{\sqrt{n^4 + 6n^3} + n^2 + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-9}{\sqrt{1 + \frac{6}{n}} + 1 + \frac{3}{n}} = -\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość $-9/2$.

132. Wskaż liczbę rzeczywistą k , dla której podana granica istnieje i jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Podaj wartość granicy dla tej wartości parametru k . Jeżeli odpowiedź jest liczbą wymierną, podaj ją w postaci ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{n}{3} \right) = 1/6 \quad \text{dla } k = -3$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{n+4}{n} \right) = 1/24 \quad \text{dla } k = -4$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{2n}{4} \right) = 2/3 \quad \text{dla } k = -4$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{2n+2}{5} \right) = 4/15 \quad \text{dla } k = -5$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{2n+2020}{6} \right) = 4/45 \quad \text{dla } k = -6$$

133. Wskaż liczbę rzeczywistą k , dla której podana granica istnieje i jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Podaj wartość granicy dla tej wartości parametru k . Jeżeli odpowiedź jest liczbą wymierną, podaj ją w postaci ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{n}{2}}{2} \right) = 1/8 \quad \text{dla } k = -4$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{2n}{2}}{2} \right) = 2 \quad \text{dla } k = -4$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{n}{2}}{3} \right) = 1/48 \quad \text{dla } k = -6$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{2n}{2}}{3} \right) = 4/3 \quad \text{dla } k = -6$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{n}{3}}{2} \right) = 1/72 \quad \text{dla } k = -6$$

$$\text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{2n}{2}}{4} \right) = 2/3 \quad \text{dla } k = -8$$

$$\text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{2n}{4}}{3} \right) = 4/81 \quad \text{dla } k = -12$$