116. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\sqrt{n^8+3n^6}-n^4}{7n^2-4n+5} \leqslant D\,.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leqslant 6C$ (wersja łatwiejsza).
Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leqslant 4C$ (wersja trudniejsza).

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów przepisujemy dane w zadaniu wyrażenie w postaci niezawierającej w liczniku różnicy wyrażeń zbliżonej wielkości:

$$\frac{\sqrt{n^8+3n^6}-n^4}{7n^2-4n+5} = \frac{\sqrt{n^8+3n^6}-n^4}{7n^2-4n+5}\cdot\frac{\sqrt{n^8+3n^6}+n^4}{\sqrt{n^8+3n^6}+n^4} = \frac{n^8+3n^6-n^8}{(7n^2-4n+5)\cdot\left(\sqrt{n^8+3n^6}+n^4\right)} =$$

$$= \frac{3n^6}{(7n^2-4n+5)\cdot\left(\sqrt{n^8+3n^6}+n^4\right)}$$

Przeprowadzamy szacowanie od góry:

$$\frac{3n^6}{(7n^2-4n+5)\cdot\left(\sqrt{n^8+3n^6}+n^4\right)} \leqslant \frac{3n^6}{(7n^2-4n^2+0)\cdot\left(\sqrt{n^8+0}+n^4\right)} = \frac{3}{3\cdot 2} = \frac{1}{2} = D\,.$$

Przeprowadzamy szacowanie od dołu:

$$\frac{3n^6}{(7n^2-4n+5)\cdot\left(\sqrt{n^8+3n^6}+n^4\right)} \geqslant \frac{3n^6}{(7n^2-0+5n^2)\cdot\left(\sqrt{n^8+3n^8}+n^4\right)} = \frac{3}{12\cdot 3} = \frac{1}{12} = C\,,$$

co daje zależność $D=6C$ wystarczającą do rozwiązania w wersji łatwiejszej.

Subtelniejsze szacowanie od dołu wykorzystuje nierówność $4(n-1)\geqslant 0$ zamiast $4n\geqslant 0$ i wygląda następująco:

$$\frac{3n^6}{(7n^2-4n+5)\cdot\left(\sqrt{n^8+3n^6}+n^4\right)} = \frac{3n^6}{(7n^2-4(n-1)+1)\cdot\left(\sqrt{n^8+3n^6}+n^4\right)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3n^6}{(7n^2-0+n^2)\cdot\left(\sqrt{n^8+3n^8}+n^4\right)} = \frac{3}{8\cdot 3} = \frac{1}{8} = C\,,$$

co daje zależność $D=4C$ wystarczającą do rozwiązania w wersji trudniejszej.

117. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3} \leqslant D\,.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leqslant 8C$ (wersja najłatwiejsza).
Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leqslant 4C$ (wersja średnio trudna).
Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leqslant 2C$ (wersja najtrudniejsza).

Rozwiązanie:

Przeprowadzamy szacowanie od góry:
$$\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3}\leqslant\frac{6n^{11}-0+2n^{11}}{6n^{11}-3n^{11}+0}=\frac{8n^{11}}{3n^{11}}=\frac{8}{3}=D\,.$$
Przeprowadzamy szacowanie od dołu:
$$\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3}\geqslant\frac{6n^{11}-3n^{11}+0}{6n^{11}-0+3n^{11}}=\frac{3n^{11}}{9n^{11}}=\frac{1}{3}=C\,,$$
co daje zależność $D=8C$ wystarczającą do rozwiązania wersji najłatwiejszej.

Subtelniejsze szacowania wykorzystują nierówności $-3n^6+2\leqslant-3+2=-1<0$ oraz $-3n^5+3\leqslant-3+3=0$ zamiast odpowiednio $-3n^6\leqslant 0$ oraz $-3n^5\leqslant 0$ i wyglądają następująco:
$$\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3}=\frac{6n^{11}+(-3n^6+2)}{6n^{11}-3n^5+3}\leqslant\frac{6n^{11}-0}{6n^{11}-3n^{11}+0}=\frac{6n^{11}}{3n^{11}}=2=D\,,$$
$$\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3}=\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}+(-3n^5+3)}\geqslant\frac{6n^{11}-3n^{11}+0}{6n^{11}-0}=\frac{3n^{11}}{6n^{11}}=\frac{1}{2}=C\,.$$
To daje zależność $D=4C$ wystarczającą do rozwiązania wersji średniej.

Można też zauważyć, że
$$6n^{11}-3n^6+2\leqslant 6n^{11}-3n^5+2<6n^{11}-3n^5+3\,,$$
skąd
$$\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3}<1=D\,.$$

Zatem rozwiązanie wersji średniej można uzyskać także przy użyciu szacowań z $C=1/3$ oraz $D=1$.

Przedstawione wyżej szacowania z $C=1/2$ oraz $D=1$ składają się na rozwiązanie wersji najtrudniejszej.

118. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną k oraz liczby wymierne dodatnie C oraz D, a następnie udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności
$$Cn^k\leqslant\sqrt{4n^2+1}+\sqrt{4n^2+2}+\sqrt{4n^2+3}+\sqrt{4n^2+4}+\ldots+\sqrt{16n^2-1}+\sqrt{16n^2}\leqslant Dn^k\,.$$
Trudność zadania zależy od uzyskanego przez Ciebie ilorazu D/C:
- Przy $D/C\geqslant 2$ zadanie jest najłatwiejsze.
- Przy $D/C<3/2$ zadanie jest najtrudniejsze.

Rozwiązanie:

Dana w zadaniu suma ma $12n^2$ składników. Możemy zatem wykonać szacowania
$$24n^3=12n^2\cdot\sqrt{4n^2}\leqslant\sum_{i=4n^2+1}^{16n^2}\sqrt{i}\quad\leqslant 12n^2\cdot\sqrt{16n^2}=48n^3\,,$$
co kończy rozwiązanie w werszji najłatwiejszej.

Uzyskaliśmy tu liczby $k=3$, $C=24$, $D=48$ i iloraz $D/C=2$.

Bardziej subtelne szacowanie wymaga rozbicia wyjściowej sumy na dwie sumy

$$\sum_{i=4n^2+1}^{16n^2} \sqrt{i} = \sum_{i=4n^2+1}^{9n^2} \sqrt{i} + \sum_{i=9n^2+1}^{16n^2} \sqrt{i} \ ,$$

a następnie wykonania szacowania dla każdej z sum z osobna.

Otrzymujemy

$$10n^3 = 5n^2 \cdot \sqrt{4n^2} \leqslant \sum_{i=4n^2+1}^{9n^2} \sqrt{i} \leqslant 5n^2 \cdot \sqrt{9n^2} = 15n^3$$

oraz

$$21n^3 = 7n^2 \cdot \sqrt{9n^2} \leqslant \sum_{i=9n^2+1}^{16n^2} \sqrt{i} \leqslant 7n^2 \cdot \sqrt{16n^2} = 28n^3 \, ,$$

skąd po dodaniu

$$31n^3 \leqslant \sum_{i=4n^2+1}^{16n^2} \sqrt{i} \leqslant 43n^3 \, .$$

To kończy rozwiązanie wersji najtrudniejszej.

Uzyskane liczby to $k=3$, $C=31$, $D=43$, a zatem $D/C = 43/31 < 45/30 = 3/2$.

119. Dobrać odpowiednie liczby całkowite dodatnie s i t oraz odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}-n^5\right)^s}{\left(\sqrt{n^8+3n^7}-n^4\right)^t} \leqslant 18C \, .$$

Rozwiązanie:

Ponieważ zarówno w liczniku, jak i w mianowniku wyrażenia danego w treści zadania występują różnice wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy dwukrotnie wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b = \frac{a^2-b^2}{a+b} \, .$$

Otrzymujemy

$$\frac{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}-n^5\right)^s}{\left(\sqrt{n^8+3n^7}-n^4\right)^t} = \frac{\left(\sqrt{n^8+3n^7}+n^4\right)^t \cdot (8n^7)^s}{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}+n^5\right)^s \cdot (3n^7)^t} = \frac{\left(\sqrt{n^8+3n^7}+n^4\right)^t \cdot 2^{3s} \cdot n^{7s}}{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}+n^5\right)^s \cdot 3^t \cdot n^{7t}} \, .$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od góry

$$\frac{\left(\sqrt{n^8+3n^7}+n^4\right)^t \cdot 2^{3s} \cdot n^{7s}}{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}+n^5\right)^s \cdot 3^t \cdot n^{7t}} \leqslant \frac{\left(\sqrt{n^8+3n^8}+n^4\right)^t \cdot 2^{3s} \cdot n^{7s}}{\left(\sqrt{n^{10}+0}+n^5\right)^s \cdot 3^t \cdot n^{7t}} = \frac{(3n^4)^t \cdot 2^{3s} \cdot n^{7s}}{(2n^5)^s \cdot 3^t \cdot n^{7t}} = 2^{2s} \cdot n^{2s-3t}$$

i od dołu

$$\frac{\left(\sqrt{n^8+3n^7}+n^4\right)^t \cdot 2^{3s} \cdot n^{7s}}{\left(\sqrt{n^{10}+8n^7}+n^5\right)^s \cdot 3^t \cdot n^{7t}} \geqslant \frac{\left(\sqrt{n^8+0}+n^4\right)^t \cdot 2^{3s} \cdot n^{7s}}{\left(\sqrt{n^{10}+8n^{10}}+n^5\right)^s \cdot 3^t \cdot n^{7t}} = \frac{(2n^4)^t \cdot 2^{3s} \cdot n^{7s}}{(4n^5)^s \cdot 3^t \cdot n^{7t}} = \frac{2^{s+t} \cdot n^{2s-3t}}{3^t} \, .$$

Ponieważ oszacowania mają być niezależne od n, musi być $2s-3t=0$, wobec czego przyjmujemy $s=3$ i $t=2$. Wówczas dolne oszacowanie przybiera wartość $C=32/9$, a górne $64=18C$.

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałymi $s=3$, $t=2$ oraz $C=32/9$.