106. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \sqrt{9n^2+40n}-\sqrt{9n^2+16n} \leqslant 2C\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

prawdziwy w przypadku $a+b\neq 0$, otrzymujemy

$$\sqrt{9n^2+40n}-\sqrt{9n^2+16n}=\frac{24n}{\sqrt{9n^2+40n}+\sqrt{9n^2+16n}}=\frac{24}{\sqrt{9+\frac{40}{n}}+\sqrt{9+\frac{16}{n}}}\,.$$

Szacowanie od dołu (mianownika od góry, czyli n od dołu przez 1) prowadzi do:

$$\frac{24}{\sqrt{9+\frac{40}{n}}+\sqrt{9+\frac{16}{n}}} \geqslant \frac{24}{\sqrt{9+40}+\sqrt{9+16}}=\frac{24}{7+5}=2=C\,.$$

Szacowanie od góry (mianownika od dołu, czyli $1/n$ przez 0) prowadzi do:

$$\frac{24}{\sqrt{9+\frac{40}{n}}+\sqrt{9+\frac{16}{n}}} \leqslant \frac{24}{\sqrt{9+0}+\sqrt{9+0}}=\frac{24}{3+3}=4=2C\,.$$

Zatem udowodniliśmy podane w treści zadania oszacowania ze stałą $C=2$.

Uwaga:

Nietrudno zauważyć, że ciąg $\left(\frac{24}{\sqrt{9+\frac{40}{n}}+\sqrt{9+\frac{16}{n}}}\right)_{n=1}^{\infty}$ jest rosnący, jego pierwszy wyraz jest równy 2, a granica[1] 4. Wynika stąd, że uzyskane przez nas oszacowania są optymalne, w związku z czym w każdym poprawnym rozwiązaniu musi być $C=2$.

107. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \sqrt[3]{n^3+63n^2}-n \leqslant 7C\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy wzór na różnicę sześcianów w postaci

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}\,.$$

[1] Tu i wszędzie dalej, gdzie pojawia się granica ciągu: Jeśli nie wiesz, co to jest, odłóż czytanie tych fragmentów na później.

Otrzymujemy

$$\sqrt[3]{n^3+63n^2}-n=\frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+63n^2}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+63n^2}+n^2}\,.$$

Dalszą część rozwiązania można przeprowadzić dwoma sposobami.

Sposób I

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+63n^2}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+63n^2}+n^2}\geqslant\frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+63n^3}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+63n^3}+n^2}=$$

$$=\frac{63n^2}{16n^2+4n^2+n^2}=\frac{63n^2}{21n^2}=3$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+63n^2}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+63n^2}+n^2}\leqslant\frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+0}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+0}+n^2}=\frac{63n^2}{3n^2}=21=7\cdot3\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C=3$.

Sposób II

Oznaczamy uzyskane wyrażenie przez a_n i przepisujemy je w postaci

$$a_n=\frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+63n^2}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+63n^2}+n^2}=\frac{63}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{63}{n}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{63}{n}}+1}\,.$$

Ponieważ licznik ostatniego wyrażenia jest stały, a mianownik maleje wraz ze wzrostem n, ciąg (a_n) jest rosnący. Stąd wynika, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_1\leqslant a_n\leqslant\lim_{n\to\infty}a_n\,.$$

Ponieważ $a_1=3$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=21$, otrzymujemy wymagane oszacowania ze stałą $C=3$.

108. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\sqrt[8]{n^8+255n^7}-n\leqslant32C\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, powinniśmy przez wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia doprowadzić je do postaci, w której można będzie wykonać odejmowanie.

W tym celu trzykrotnie zastosujemy wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

gdzie przy dodatnich a, b mianownik jest zawsze różny od zera.

Możemy też od razu zastosować wzór na różnicę ósmych potęg w postaci

$$a-b=\frac{a^8-b^8}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a^4+b^4)},$$

który powstaje właśnie przez trzykrotne skorzystanie ze wzoru na różnicę kwadratów.

Otrzymujemy

$$\sqrt[8]{n^8+255n^7}-n=\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^7}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^7}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^7}+n^4\right)}. \qquad (\diamondsuit)$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^7}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^7}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^7}+n^4\right)}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^8}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^8}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^8}+n^4\right)}=$$

$$=\frac{255n^7}{17n\cdot5n^2\cdot3n^4}=\frac{255n^7}{255n^7}=1$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^7}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^7}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^7}+n^4\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+0}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+0}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+0}+n^4\right)}=$$

$$=\frac{255n^7}{2n\cdot2n^2\cdot2n^4}=\frac{255n^7}{8n^7}=\frac{255}{8}<\frac{256}{8}=32\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C=1$.

Sposób II:

Zaczynamy jak w sposobie I. Otrzymawszy wyrażenie $(\diamondsuit)$ przekształcamy je dalej i oznaczamy przez a_n:

$$\frac{255n^7}{\left(\sqrt[8]{n^8+255n^7}+n\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^8+255n^7}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n^8+255n^7}+n^4\right)}=$$

$$=\frac{255}{\left(\sqrt[8]{1+255n^{-1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+255n^{-1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+255n^{-1}}+1\right)}=a_n\,.$$

Ponieważ w powyższym wyrażeniu wraz ze wzrostem n maleje mianownik, a przy tym wszystkie składowe tego wyrażenia są dodatnie, ciąg (a_n) jest rosnący. Dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą więc nierówności

$$a_1\leqslant a_n<\lim_{k\to\infty}a_k\,. \qquad (\clubsuit)$$

Ponieważ

$$a_1=\sqrt[8]{1+255}-1=2-1=1$$

oraz

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{255}{\left(\sqrt[8]{1+255k^{-1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+255k^{-1}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+255k^{-1}}+1\right)} =$$

$$= \frac{255}{\left(\sqrt[8]{1+0}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+0}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+0}+1\right)} = \frac{255}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{255}{8} < \frac{256}{8} = 32\,,$$

otrzymujemy wymagane oszacowania ze stałą $C=1$.

Uwaga:

Formalnie poprawna, ale dydaktycznie bardzo niezręczna wersja nierówności (♣), to

$$a_1 \leqslant a_n < \lim_{n\to\infty} a_n\,.$$

W powyższym wzorze zmienna n występuje w dwóch zupełnie różnych rolach. Przemianowanie jednego z jej bytów na k pozwala uniknąć nieporozumień.

109. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{C}{n} \leqslant \sqrt[4]{n^4+15n^2}-n \leqslant \frac{4C}{n}\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a-b = \frac{a^4-b^4}{(a^2+b^2)\cdot(a+b)}$$

otrzymujemy

$$\sqrt[4]{n^4+15n^2}-n = \frac{15n^2}{\left(\sqrt{n^4+15n^2}+n^2\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+15n^2}+n\right)} = \frac{15}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{15}{n^2}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{15}{n^2}}+1\right)}$$

Szacowanie od dołu (mianownika od góry) prowadzi do:

$$\frac{15}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{15}{n^2}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{15}{n^2}}+1\right)} \geqslant \frac{15}{n\cdot\left(\sqrt{1+15}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+15}+1\right)} = \frac{1}{n}\,.$$

Szacowanie od góry (mianownika od dołu) prowadzi do:

$$\frac{15}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{15}{n^2}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{15}{n^2}}+1\right)} \leqslant \frac{15}{n\cdot\left(\sqrt{1+0}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+0}+1\right)} = \frac{15}{4n} < \frac{16}{4n} = \frac{4}{n}\,.$$

Zatem udowodniliśmy podane w treści zadania oszacowania ze stałą $C=1$.

110. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\sqrt{25n^2+11}-5n}{\sqrt[4]{n^4+80n^2}-n} \leqslant 11C\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ zarówno w liczniku, jak i w mianowniku wyrażenia danego w treści zadania występują różnice wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy w liczniku wzór na różnicę kwadratów w postaci
$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$
a w mianowniku następujący wzór na różnicę czwartych potęg:
$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{a^4-b^4}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)}\,.$$
Otrzymujemy
$$\frac{\sqrt{25n^2+11}-5n}{\sqrt[4]{n^4+80n^2}-n}=\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^2}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^2}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+11}+5n\right)\cdot 80n^2}\,.$$
Szacujemy ostatnie wyrażenie od góry
$$\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^2}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^2}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+11}+5n\right)\cdot 80n^2}\leqslant\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^4}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^4}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+0}+5n\right)\cdot 80n^2}=$$
$$=\frac{11\cdot 4n\cdot 10n^2}{10n\cdot 80n^2}=\frac{11}{20}$$
i od dołu
$$\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+80n^2}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+80n^2}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+11}+5n\right)\cdot 80n^2}\geqslant\frac{11\cdot\left(\sqrt[4]{n^4+0}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n^4+0}+n^2\right)}{\left(\sqrt{25n^2+11n^2}+5n\right)\cdot 80n^2}=$$
$$=\frac{11\cdot 2n\cdot 2n^2}{11n\cdot 80n^2}=\frac{1}{20}\,.$$
Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C=1/20$.

111. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności
$$C\leqslant\frac{\sqrt{25n^2+24}-5n}{\sqrt{9n^2+40}-3n}\leqslant 2C\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ zarówno w liczniku, jak i w mianowniku wyrażenia danego w treści zadania występują różnice wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy dwukrotnie wzór na różnicę kwadratów w postaci
$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,.$$
Otrzymujemy
$$\frac{\sqrt{25n^2+24}-5n}{\sqrt{9n^2+40}-3n}=\frac{24\cdot\left(\sqrt{9n^2+40}+3n\right)}{40\cdot\left(\sqrt{25n^2+24}+n\right)}\,.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od góry

$$\frac{24\cdot\left(\sqrt{9n^2+40}+3n\right)}{40\cdot\left(\sqrt{25n^2+24}+5n\right)}\leqslant\frac{24\cdot\left(\sqrt{9n^2+40n^2}+3n\right)}{40\cdot\left(\sqrt{25n^2+0}+5n\right)}=\frac{24\cdot(7n+3n)}{40\cdot(5n+5n)}=\frac{24\cdot10n}{40\cdot10n}=\frac{3}{5}$$

i od dołu

$$\frac{24\cdot\left(\sqrt{9n^2+40}+3n\right)}{40\cdot\left(\sqrt{25n^2+24}+5n\right)}\geqslant\frac{24\cdot\left(\sqrt{9n^2+0}+3n\right)}{40\cdot\left(\sqrt{25n^2+24n^2}+5n\right)}=\frac{24\cdot(3n+3n)}{40\cdot(7n+5n)}=\frac{24\cdot6n}{40\cdot12n}=\frac{3}{10}\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą $C=3/10$.

112. Na potrzeby tego zadania liczbę nazwiemy ładną, jeśli ma jednocyfrowy licznik i jednocyfrowy mianownik.
Dla odpowiednio dobranych **ładnych** liczb wymiernych dodatnich C i D spełniających nierówność $D<3C$ udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{\sqrt[3]{n^3+7}-n}{\sqrt{4n^4+5}-2n^2}\leqslant D\,.$$

Rozwiązanie:
Stosując do licznika wzór na różnicę sześcianów w postaci

$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}\,,$$

a do mianownika wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

otrzymujemy

$$\frac{\sqrt[3]{n^3+7}-n}{\sqrt{4n^4+5}-2n^2}=\frac{7\cdot\left(\sqrt{4n^4+5}+2n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{\left(n^3+7\right)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+7}+n^2\right)\cdot5}\,.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując licznik od dołu i mianownik od góry:

$$\frac{7\cdot\left(\sqrt{4n^4+5}+2n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{\left(n^3+7\right)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+7}+n^2\right)\cdot5}\geqslant\frac{7\cdot\left(\sqrt{4n^4+0}+2n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{\left(n^3+7n^3\right)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+7n^3}+n^2\right)\cdot5}=\frac{4}{5}\,.$$

Następnie szacujemy od góry, szacując licznik od góry i mianownik od dołu:

$$\frac{7\cdot\left(\sqrt{4n^4+5}+2n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{\left(n^3+7\right)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+7}+n^2\right)\cdot5}\leqslant\frac{7\cdot\left(\sqrt{4n^4+5n^4}+2n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{\left(n^3+0\right)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3+0}+n^2\right)\cdot5}=\frac{7}{3}\,.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałymi

$$C=\mathbf{\frac{4}{5}}\qquad\text{i}\qquad D=\mathbf{\frac{7}{3}}=\frac{35}{15}<\frac{36}{15}=\frac{12}{5}=3C\,.$$

113. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{\sqrt{36n+28}-\sqrt{36n+13}}{\sqrt{25n+75}-\sqrt{25n+11}} \leqslant 2C\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując dwukrotnie (raz na poziomie licznika i raz na poziomie mianownika) wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,,$$

prawdziwy w przypadku $a+b\neq 0$, otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{36n+28}-\sqrt{36n+13}}{\sqrt{25n+75}-\sqrt{25n+11}}=\frac{15\cdot\left(\sqrt{25n+75}+\sqrt{25n+11}\right)}{64\cdot\left(\sqrt{36n+28}+\sqrt{36n+13}\right)}\,. \tag{1}$$

Szacowanie od dołu (licznika od dołu i mianownika od góry) prowadzi do:

$$\frac{15\cdot\left(\sqrt{25n+75}+\sqrt{25n+11}\right)}{64\cdot\left(\sqrt{36n+28}+\sqrt{36n+13}\right)} \geqslant \frac{15\cdot\left(\sqrt{25n+0}+\sqrt{25n+0}\right)}{64\cdot\left(\sqrt{36n+28n}+\sqrt{36n+13n}\right)}=$$

$$=\frac{15\cdot 10\cdot\sqrt{n}}{64\cdot\left(\sqrt{64n}+\sqrt{49n}\right)}=\frac{150\cdot\sqrt{n}}{64\cdot 15\cdot\sqrt{n}}=\frac{5}{32}=C\,. \tag{2}$$

Szacowanie od góry (licznika od góry i mianownika od dołu) prowadzi do:

$$\frac{15\cdot\left(\sqrt{25n+75}+\sqrt{25n+11}\right)}{64\cdot\left(\sqrt{36n+28}+\sqrt{36n+13}\right)} \leqslant \frac{15\cdot\left(\sqrt{25n+75n}+\sqrt{25n+11n}\right)}{64\cdot\left(\sqrt{36n+0}+\sqrt{36n+0}\right)}=$$

$$=\frac{15\cdot\left(\sqrt{100n}+\sqrt{36n}\right)}{64\cdot 12\cdot\sqrt{n}}=\frac{15\cdot 16\cdot\sqrt{n}}{64\cdot 12\cdot\sqrt{n}}=\frac{5}{16}=2C\,. \tag{3}$$

Zatem udowodniliśmy podane w treści zadania oszacowania ze stałą $C=5/32$.

114. Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C\cdot n^k \leqslant \frac{\sqrt{40n-11}+3}{\sqrt[3]{40n+11}-1} \leqslant 4C\cdot n^k\,.$$

Rozwiązanie:

Szacujemy dane w treści zadania wyrażenie od góry (szacujemy licznik od góry, a mianownik od dołu, upodabniając wszystkie składniki do składnika dominującego; następnie szacujemy współczynniki pod pierwiastkami tak, aby przy pierwiastkowaniu uzyskać liczby całkowite):

$$\frac{\sqrt{40n-11}+3}{\sqrt[3]{40n+11}-1}<\frac{\sqrt{40n-0}+3n^{1/2}}{\sqrt[3]{40n+0}-n^{1/3}}<\frac{\sqrt{49n}+3n^{1/2}}{\sqrt[3]{27n}-n^{1/3}}=\frac{10n^{1/2}}{2n^{1/3}}=5n^{1/6}\,.$$

Analogiczne szacowanie od dołu (licznik od dołu, mianownik od góry) prowadzi do:

$$\frac{\sqrt{40n-11}+3}{\sqrt[3]{40n+11}-1} > \frac{\sqrt{40n-11n}+0}{\sqrt[3]{40n+11n}-0} = \frac{\sqrt{29n}}{\sqrt[3]{51n}} > \frac{\sqrt{25n}}{\sqrt[3]{64n}} = \frac{5n^{1/2}}{4n^{1/3}} = \frac{5n^{1/6}}{4}\,.$$

Udowodniliśmy więc żądane nierówności ze stałymi $C=5/4$ i $k=1/6$.

Uwagi:

Liczba $k=1/6$ jest wyznaczona jednoznacznie. Każde rozwiązanie, w którym występuje inna wartość k, jest błędne.

Stała C wynika po części z natury szacowanego wyrażenia, a po części z przyjętej przez nas metody szacowania. Przy innej strategii szacowania można sobie wyobrazić poprawne rozwiązanie z inną stałą C.

W powyższym rozwiązaniu występują ostre nierówności, podczas gdy w treści zadania nierówności są słabe. To dlatego, że celem zadania jest uzyskanie zasadniczego oszacowania, a nie śledzenie, które nierówności są słabe, a które ostre – stąd słabe nierówności w tezie zadania, pomimo że łatwo można uzyskać ostre. Przy tak sformułowanej treści zadania, w przedstawionym wyżej rozwiązaniu można więc zamienić nierówności ostre na słabe (wszystkie lub niektóre z nich).

115. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left|\sqrt{n^2+1}-n-\frac{C}{n}\right| < \frac{D}{n^3}\,.$$

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów przepisujemy lewą stronę nierówności w postaci niezawierającej różnicy wyrażeń zbliżonej wielkości:

$$\left|\sqrt{n^2+1}-n-\frac{C}{n}\right| = \left|\sqrt{n^2+1}-\left(n+\frac{C}{n}\right)\right| = \left|\frac{n^2+1-\left(n+\frac{C}{n}\right)^2}{\sqrt{n^2+1}+\left(n+\frac{C}{n}\right)}\right| = \left|\frac{1-2C-\frac{C^2}{n^2}}{\sqrt{n^2+1}+\left(n+\frac{C}{n}\right)}\right|\,.$$

W liczniku ostatniego wyrażenia dominującymi składnikami są 1 oraz $2C$. Aby wyrażenie to miało możliwie mały rząd wielkości, dobieramy C tak, aby te dwa składniki się uprościły, czyli $C=1/2$. Przy tej wartości C wykonujemy szacowanie od góry:

$$\frac{\frac{1}{4n^2}}{\sqrt{n^2+1}+\left(n+\frac{1}{2n}\right)} = \frac{1}{4n^2\left(\sqrt{n^2+1}+n+\frac{1}{2n}\right)} < \frac{1}{4n^2\left(\sqrt{n^2+0}+n+0\right)} = \frac{1/8}{n^3}\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania z $D=1/8$.

Uwagi:

Stała C jest wyznaczona jednoznacznie. Każde rozwiązanie z $C\neq 1/2$ jest błędne.

Stała $D=1/8$ jest najmniejsza możliwa. Każde rozwiązanie z $D<1/8$ jest błędne.