

**Zadania do omówienia na ćwiczeniach zdalnych
we wtorek 27.10.2020 i czwartek 29.10.2020.**

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

106. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt{9n^2 + 40n} - \sqrt{9n^2 + 16n} \leq 2C.$$

107. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[3]{n^3 + 63n^2} - n \leq 7C.$$

108. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[8]{n^8 + 255n^7} - n \leq 32C.$$

109. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{C}{n} \leq \sqrt[4]{n^4 + 15n^2} - n \leq \frac{4C}{n}.$$

110. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{25n^2 + 11} - 5n}{\sqrt[4]{n^4 + 80n^2} - n} \leq 11C.$$

111. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{25n^2 + 24} - 5n}{\sqrt{9n^2 + 40} - 3n} \leq 2C.$$

112. Na potrzeby tego zadania liczbę nazwiemy ładną, jeśli ma jednocyfrowy licznik i jednocyfrowy mianownik.

Dla odpowiednio dobranych **ładnych** liczb wymiernych dodatnich C i D spełniających nierówność $D < 3C$ udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt[3]{n^3+7}-n}{\sqrt{4n^4+5}-2n^2} \leq D.$$

113. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{36n+28}-\sqrt{36n+13}}{\sqrt{25n+75}-\sqrt{25n+11}} \leq 2C.$$

114. Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \cdot n^k \leq \frac{\sqrt{40n-11}+3}{\sqrt[3]{40n+11}-1} \leq 4C \cdot n^k.$$

115. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left| \sqrt{n^2+1}-n-\frac{C}{n} \right| < \frac{D}{n^3}.$$