87. Która liczba jest większa: $\left(7-\sqrt{17}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{17}\right)^{2015}$?

Odpowiedź: $\left(7-\sqrt{17}\right)^{2017}>\left(7-\sqrt{17}\right)^{2015}$.
Powyższa nierówność wynika z nierówności $x^{2017}>x^{2015}$ dla $x>1$ oraz z oszacowania

$$\mathbf{7-\sqrt{17}}>7-\sqrt{25}=7-5=2>\mathbf{1}\,.$$

88. Która liczba jest większa: $\left(7-\sqrt{37}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{37}\right)^{2015}$?

Odpowiedź: $\left(7-\sqrt{37}\right)^{2017}<\left(7-\sqrt{37}\right)^{2015}$.
Powyższa nierówność wynika z nierówności $x^{2017}<x^{2015}$ dla $0<x<1$ oraz z oszacowań

$$\mathbf{0}=7-7=7-\sqrt{49}<\mathbf{7-\sqrt{37}}<7-\sqrt{36}=7-6=\mathbf{1}\,.$$

89. Która liczba jest większa: $\left(7-\sqrt{57}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{57}\right)^{2015}$?

Odpowiedź: $\left(7-\sqrt{57}\right)^{2017}>\left(7-\sqrt{57}\right)^{2015}$.
Powyższa nierówność wynika z nierówności $x^{2017}>x^{2015}$ dla $-1<x<0$ oraz z oszacowań

$$-\mathbf{1}=7-8=7-\sqrt{64}<\mathbf{7-\sqrt{57}}<7-\sqrt{49}=7-7=\mathbf{0}\,.$$

90. Która liczba jest większa: $\left(7-\sqrt{77}\right)^{2017}$ czy $\left(7-\sqrt{77}\right)^{2015}$?

Odpowiedź: $\left(7-\sqrt{77}\right)^{2017}<\left(7-\sqrt{77}\right)^{2015}$.
Powyższa nierówność wynika z nierówności $x^{2017}<x^{2015}$ dla $x<-1$ oraz z oszacowania

$$\mathbf{7-\sqrt{77}}<7-\sqrt{64}=7-8=-\mathbf{1}\,.$$

91. Która liczba jest większa: $2^{2^{2^{11}}}$ czy $1000^{2^{2^{10}}}$?

Odpowiedź: $2^{2^{2^{11}}}>1000^{2^{2^{10}}}$.
Korzystając z własności potęgowania otrzymujemy

$$2^{2^{2^{11}}}=2^{2^{2^{10}+2^{10}}}=2^{2^{2^{10}}\cdot 2^{2^{10}}}=\left(2^{2^{2^{10}}}\right)^{2^{2^{10}}}>1000^{2^{2^{10}}}\,.$$

Ostatnia nierówność wynika z nierówności

$$2^{2^{2^{10}}}=2^{2^{1024}}>2^{2^{10}}=2^{1024}>2^{10}=1024>1000\,.$$

92. Która liczba jest większa: $a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{a^{16}}}}}}}}}}}}}}}}$ czy 10^{10} ?
Liczba $a=\sqrt[4]{2}$ występuje w pierwszym wyrażeniu 16 razy.

Rozwiązanie:

Z równości $a^{16}=16$ wynika, że pierwsza liczba jest równa 16, jest więc mniejsza.

93. Która liczba jest większa: $\log_a b$ czy $\log_b a$?
Przyjmujemy $a=\log_2 3$ oraz $b=\log_3 2$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $ab=1$, mamy $\log_a b=\log_b a=-1$.

94. Uporządkować podane liczby w kolejności rosnącej.

$$A=10^{10^{11}},\quad B=10^{10^{20}},\quad C=10^{10^{50}},\quad D=10^{10^{250}},\quad E=(10!)^{10!}$$
$$F=(100!)^{10^{10}},\quad G=2^{100!},\quad H=2^{2^{100}},\quad I=10^{10^{10^3}},\quad J=2^{2^{2^{10}}}$$

Rozwiązanie:

Poprawny porządek jest następujący

$$E<A<F<B<H<C<G<D<J<I$$

Szacowania dowodzące poprawności powyższego uporządkowania:

$$E=(10!)^{10!}<\left(10^{10}\right)^{10^{10}}=10^{10^{11}}=A$$
$$A=10^{10^{11}}=\left(10^{10}\right)^{10^{10}}<\left(10^{90}\right)^{10^{10}}<(100!)^{10^{10}}=F$$
$$F=(100!)^{10^{10}}<\left(10^{200}\right)^{10^{10}}<\left(10^{1000}\right)^{10^{10}}=10^{10^{13}}<B$$
$$B<10^{10^{29}}<16^{10^{30}/4}=2^{10^{30}}=2^{1000^{10}}<2^{1024^{10}}=2^{2^{100}}=H$$
$$H=2^{2^{100}}<2^{2^{120}}=2^{8^{40}}<10^{10^{40}}<C$$
$$C<10^{10^{90}}<16^{100!/4}=2^{100!}=G$$
$$G=2^{100!}<10^{10^{200}}<D$$
$$D<10^{10^{299}}<16^{10^{300}/4}=2^{10^{300}}=2^{1000^{100}}<2^{1024^{100}}<2^{2^{1000}}<2^{2^{2^{10}}}=J$$
$$J=2^{2^{2^{10}}}=2^{2^{1024}}=2^{4^{512}}<10^{10^{512}}<10^{10^{1000}}=I$$

95. Dla odpowiednio dobranej liczby naturalnej n udowodnić nierówności

$$n^{2^{120}} < 2^n < n^{2^{122}} .$$

Rozwiązanie:

Przyjęcie $n=2^m$ pozwala na przepisanie podanej nierówności w postaci równoważnej:

$$2^{m\cdot 2^{120}} < 2^{2^m} < 2^{m\cdot 2^{122}} ,$$

czyli

$$m\cdot 2^{120} < 2^m < m\cdot 2^{122} .$$

Z kolei podstawienie $m=2^k$ prowadzi do

$$2^{k+120} < 2^{2^k} < 2^{k+122} ,$$

czyli

$$k+120 < 2^k < k+122 .$$

Zauważając, że powyższe nierówności są prawdziwe dla $k=7$, otrzymujemy $m=2^7=128$ i w konsekwencji $n=\mathbf{2^{128}}$.

96. Wskazać odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnić dla niej nierówności

$$n^{2^{2017}} < 2^n < n^{2^{2018}} .$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Przyjmijmy $n=2^k$. Wówczas podane nierówności przybierają postać

$$2^{k\cdot 2^{2017}} < 2^{2^k} < 2^{k\cdot 2^{2018}} ,$$

czyli

$$k\cdot 2^{2017} < 2^k < k\cdot 2^{2018} .$$

Zauważmy, że powyższe nierówności są prawdziwe dla $k=2028$, gdyż wtedy

$$k\cdot 2^{2017} = 2028\cdot 2^{2017} < 2048\cdot 2^{2017} = 2^{11}\cdot 2^{2017} = 2^{2028} = 2^k$$

oraz

$$2^k = 2^{2028} = 2^{10}\cdot 2^{2018} = 1024\cdot 2^{2018} < 2028\cdot 2^{2018} = k\cdot 2^{2018} .$$

Odpowiedź

Liczbą spełniającą podane nierówności jest $n=2^{2028}$.

Sposób II

Przyjmijmy $n=k\cdot 2^{2017}$. Wtedy podane nierówności przybierają postać

$$\left(k\cdot 2^{2017}\right)^{2^{2017}} < 2^{k\cdot 2^{2017}} < \left(k\cdot 2^{2017}\right)^{2^{2018}} ,$$

czyli

$$\left(k\cdot 2^{2017}\right)^{2^{2017}} < \left(2^k\right)^{2^{2017}} < \left(k^2\cdot 2^{4034}\right)^{2^{2017}} ,$$

co jest równoważne nierównościom

$$k\cdot 2^{2017}<2^k<k^2\cdot 2^{4034} \qquad (\heartsuit)\,.$$

Zauważmy, że nierówności ($\heartsuit$) są prawdziwe dla $k=2028$, gdyż wówczas

$$k\cdot 2^{2017}=2028\cdot 2^{2017}<2048\cdot 2^{2017}=2^{11}\cdot 2^{2017}=2^{2028}=2^k$$

oraz

$$2^k=2^{2028}=2^{20}\cdot 2^{2008}=1024^2\cdot 2^{2008}<2028^2\cdot 2^{2008}=k^2\cdot 2^{2008}<k^2\cdot 2^{4034}\,.$$

Ale nierówności ($\heartsuit$) są też prawdziwe dla $k=4056$, gdyż wówczas

$$k\cdot 2^{2017}=4056\cdot 2^{2017}<4096\cdot 2^{2017}=2^{12}\cdot 2^{2017}=2^{2029}<2^{4056}=2^k$$

oraz

$$2^k=2^{4056}=2^{22}\cdot 2^{4034}=2048^2\cdot 2^{4034}<4056^2\cdot 2^{4034}=k^2\cdot 2^{4034}\,.$$

Odpowiedź

Liczbą spełniającą podane nierówności jest $n=2028\cdot 2^{2017}$. A innym przykładem jest $n=4056\cdot 2^{2017}$.

97. Wskazać odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnić dla niej nierówności

$$4^n<n^{2^{2017}}<8^n\,.$$

Rozwiązanie:

Ślepa uliczka

Przyjmijmy $n=2^k$. Wówczas podane nierówności przybierają postać

$$4^{2^k}<2^{k\cdot 2^{2017}}<8^{2^k}\,,$$

czyli kolejno

$$2\cdot 2^k<k\cdot 2^{2017}<3\cdot 2^k\,,$$

$$2\cdot 2^{k-2017}<k<3\cdot 2^{k-2017}\,. \qquad (\heartsuit)$$

Jednak nie udaje się dobrać liczby naturalnej k, która spełniałaby nierówności ($\heartsuit$).

Rozwiązanie poprawne

Przyjmijmy $n=k\cdot 2^{2017}$. Wtedy podane nierówności przybierają postać

$$4^{k\cdot 2^{2017}}<\left(k\cdot 2^{2017}\right)^{2^{2017}}<8^{k\cdot 2^{2017}}\,,$$

czyli

$$\left(4^k\right)^{2^{2017}}<\left(k\cdot 2^{2017}\right)^{2^{2017}}<\left(8^k\right)^{2^{2017}}\,,$$

co jest równoważne kolejnym nierównościom

$$4^k<k\cdot 2^{2017}<8^k\,,$$

$$2^{2k}<k\cdot 2^{2017}<2^{3k}\,. \qquad (\clubsuit)$$

Zauważmy, że nierówności ($\clubsuit$) są prawdziwe dla $k=1000$, gdyż wówczas

$$2^{2k}=2^{2000}<1000\cdot 2^{2017}<2^{10}\cdot 2^{2017}=2^{2027}<2^{3000}=2^{3k}\,.$$

Odpowiedź

Liczbą spełniającą podane nierówności jest $n=1000\cdot 2^{2017}$.

Uwaga

Liczbę wymaganą w zadaniu otrzymamy także dla k spełniających nierówności

$$676\leqslant k\leqslant 1013\,.$$

Zauważ, że wśród tych liczb nie ma potęgi dwójki!!!

98. Udowodnić nierówność

$$n^{n^{2^{1000}}}<2^{2^n}$$

dla wybranej przez siebie liczby naturalnej $n>1$.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że $n=2^{2^k}$, gdzie k jest liczbą naturalną. Dana w zadaniu nierówność przyjmuje wówczas postać

$$\left(2^{2^k}\right)^{\left(2^{2^k}\right)^{2^{1000}}}<2^{2^{2^{2^k}}}\,,$$

co po uproszczeniu sprowadza się do

$$2^{2^{k+2^{k+1000}}}<2^{2^{2^{2^k}}}\,. \tag{1}$$

Dwukrotne zlogarytmowanie przy podstawie 2 nierówności (1) prowadzi do nierówności równoważnej

$$k+2^{k+1000}<2^{2^k}\,. \tag{2}$$

Zauważmy, że nierówność (2) jest spełniona dla $k=10$, gdyż wówczas mamy

$$L=10+2^{1010}<2^4+2^{1010}<2^{1010}+2^{1010}=2^{1011}<2^{1024}=P\,.$$

Odpowiedź:

Przykładem liczby spełniającej warunki zadania jest $n=2^{2^{10}}=2^{1024}$.

99. Niech $A_n=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}}}}}}}}}}$, gdzie $\sqrt{2}$ występuje n razy, a potęgowanie jak zwykle wykonujemy od góry. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $A_n<2$.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy indukcyjny dowód nierówności

$$A_n<2\,.$$

1° Dla $n=1$ mamy $A_1=\sqrt{2}$, dowodzona nierówność przybiera więc postać

$$\sqrt{2}<2\,,$$

jest zatem prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$A_n < 2\,. \qquad (\clubsuit)$$

Wykażemy, że wówczas

$$A_{n+1} < 2\,. \qquad (\diamondsuit)$$

Zauważmy, że

$$A_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{A_n},$$

wobec czego po skorzystaniu z założenia indukcyjnego ($\clubsuit$) oraz z nierówności $a^x < a^y$ dla $a > 1$ i $x < y$, otrzymujemy

$$A_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{A_n} < \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2\,,$$

co kończy dowód nierówności ($\diamondsuit$).

Na mocy zasady indukcji dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

100. Niech $A_n = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{3}}}}}}}}}}}}$, gdzie $\sqrt{2}$ występuje n razy, a potęgowanie jak zwykle wykonujemy od góry. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $A_n < 3$.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy indukcyjny dowód nierówności

$$A_n < 3\,.$$

1° Dla $n=1$ mamy $A_1 = \sqrt{2}^3 = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$, dowodzona nierówność przybiera więc postać

$$\sqrt{8} < 3 = \sqrt{9}\,,$$

jest zatem prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$A_n < 3\,. \qquad (\clubsuit)$$

Wykażemy, że wówczas

$$A_{n+1} < 3\,. \qquad (\diamondsuit)$$

Zauważmy, że

$$A_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{A_n},$$

wobec czego po skorzystaniu z założenia indukcyjnego ($\clubsuit$) oraz z nierówności $a^x < a^y$ dla $a > 1$ i $x < y$, otrzymujemy

$$A_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{A_n} < \left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2} = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3\,,$$

co kończy dowód nierówności ($\diamondsuit$).

Na mocy zasady indukcji dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.