

**Zadania do omówienia na ćwiczeniach zdalnych  
we wtorek 20.10.2020 i czwartek 22.10.2020.**

**Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.**

**Część ćwiczeń może zostać poświęcona zadaniom  
z listy 3 wskazanym przez studentów.**

**51.** Czy istnieją takie liczby naturalne  $m, n > 1$ , że  $\log_m n = 13/7$  ?

**52.** Niech  $n$  będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy,  $n$ , liczby całkowite oraz znaki  $+, -, \cdot, :$  i  $\sqrt{\quad}$  zapisać liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od  $\frac{1}{n}$ .

**OSZUSTWO 53.**

ZADANIE: Dowieść, że liczba  $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$  jest niewymierna.

*Rozwiązanie I:*

Liczba  $-\sqrt{2}$  jest niewymierna. Także liczba  $\sqrt{3 - \sqrt{8}}$  jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat  $3 - \sqrt{8}$  też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba  $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$  jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

*Rozwiązanie II:*

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba  $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$  jest wymierna i oznaczmy ją przez  $w$ . Wtedy

$$w = \sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$$

$$w + \sqrt{2} = \sqrt{3 - \sqrt{8}}$$

$$w^2 + 2\sqrt{2}w + 2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(w + 1) + (w - 1)(w + 1) = 0$$

Dzieląc ostatnią równość przez  $w + 1$  otrzymujemy

$$2\sqrt{2} + w - 1 = 0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby  $w$ , gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

**54.** Liczby  $a$  i  $b$  są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba  $a + b$  jest niewymierna?

**55.** Liczby  $a + b$ ,  $b + c$  i  $c + a$  są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby  $a$ ,  $b$ ,  $c$  są wymierne?

**56.** Liczby  $a + b$ ,  $b + c$ ,  $c + d$  i  $d + a$  są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  są wymierne?

**20 przykładów.**

Odpowiedzi, których poprawności nie da się uzasadnić elementarnie, nie mogą być uznane.

Dać przykład takiej liczby rzeczywistej  $x$ , że

57.  $0 < x < 1$  oraz  $x$  jest niewymierna,
58.  $\sqrt{5} < x < \sqrt{6}$  oraz  $x$  jest wymierna,
59.  $x^2$  i  $x^3$  są niewymierne, ale  $x^5$  jest wymierna,
60.  $x^4$  i  $x^6$  są wymierne, ale  $x^5$  jest niewymierna,
61.  $(x+1)^2$  jest niewymierna,
62.  $x$  jest niewymierna, ale  $x + \frac{1}{x}$  jest wymierna,
63.  $x$  jest niewymierna i  $2^x$  jest niewymierna,
64.  $2^x + 3^x$  jest liczbą niewymierną,
65.  $2^x + 3^x$  jest liczbą wymierną,
66.  $\log_2 x + \log_3 x$  jest liczbą niewymierną,
67.  $\log_2 x + \log_3 x$  jest liczbą wymierną,
68.  $\log_2 x \cdot \log_3 x$  jest liczbą niewymierną,
69.  $\log_2 x \cdot \log_3 x$  jest liczbą wymierną,
70.  $2^x + \log_2 x$  jest liczbą całkowitą dodatnią,
71.  $2^x + \log_2 x$  jest liczbą niewymierną,
72.  $x + \log_2 x$  jest liczbą wymierną niecałkowitą,
73.  $x^{\sqrt{2}}$  jest liczbą wymierną niecałkowitą,
74.  $x^{\sqrt{2}}$  jest liczbą niewymierną,
75.  $\log_x(1+x)$  jest liczbą wymierną,
76.  $\log_x(1+x)$  jest liczbą niewymierną.