

**Zadania do omówienia na ćwiczeniach stacjonarnych
w piątek 16.10.2020 i poniedziałek 19.10.2020.
Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.**

39. Dowieść, że liczba $\log_{60} 150$ jest niewymierna.

40. Dowieść, że liczba $\log_{45} 75$ jest niewymierna.

41. Dowieść, że liczba $\log_{2700} 9000$ jest niewymierna.

42. Niech

$$a = 2^{32} \cdot 3^{11} \cdot 6^{10} \quad \text{oraz} \quad b = 2^{34} \cdot 3^{12} \cdot 6^{10}.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_a b$ jest wymierna czy niewymierna.

43. Dowieść, że liczba $\log_{(3/2)} \left(\frac{9}{8} \right)$ jest niewymierna.

44. Dowieść, że liczba $\log_{(9/5)} \left(\frac{27}{25} \right)$ jest niewymierna.

45. Dowieść, że liczba $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

46. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c , że liczby $a+b+c$ oraz $a^2+b^2+c^2$ są wymierne. Dowieść, że liczba $ab+bc+ca$ jest wymierna.

47. Podać przykład takiej liczby rzeczywistej dodatniej $x \neq 1$, że liczba $\log_x(x+10)$ jest wymierna.

Wskazówka: Załóż, że $\log_x(x+10)$ jest równe tak dobranej konkretnej liczbie wymiernej, aby dało się wyliczyć x .

Uzasadnić poprawność podanego przykładu, np. przez wyliczenie wartości $\log_x(x+10)$.

48. Podać 4 przykłady liczb rzeczywistych dodatnich $x \neq 1$, dla których liczba

$$\log_x(x+120)$$

jest wymierna.

Wsk.: Najpierw rozwiąż poprzednie zadanie lub zapoznaj się z jego rozwiązaniem.

Uzasadnić poprawność podanych przykładów, np. przez wyliczenie wartości $\log_x(x+120)$.

49. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych $n \geq 2$, że liczba

$$\sum_{k=2}^n \log_2 \log_k(k+1)$$

jest wymierna.

50. Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna $q > 1$ spełniająca równość $q^q = 16$.