652. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n} \ < \ \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^3} \ < \ \frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+1}\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ dowodzone nierówności przyjmują postać

$$\frac{2}{5}\cdot 2 \ < \ 1 \ < \ \frac{2}{5}\cdot 2\sqrt{2}\,,$$

wystarczy więc zauważyć, że

$$\frac{4}{5}<1$$

oraz

$$\frac{4\sqrt{2}}{5}=\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{25}}>1\,.$$

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że prawdziwe są nierówności

$$\frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n} \ < \ \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^3} \ < \ \frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+1}\,. \qquad (1)$$

Udowodnimy, że wówczas analogiczne nierówności są prawdziwe po zastąpieniu liczby n liczbą $n+1$, a mianowicie

$$\frac{2}{5}\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\sqrt{n+1} \ < \ \sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k^3} \ < \ \frac{2}{5}\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\sqrt{n+2}\,. \qquad (2)$$

W celu dowodu lewej nierówności (2) skorzystamy z lewej nierówności założenia indukcyjnego (1). Otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k^3}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^3}+\sqrt{(n+1)^3}>\frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n}+\sqrt{(n+1)^3}\,,$$

a więc do zakończenia dowodu lewej nierówności (2) wystarczy dowieść, że

$$\frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n}+\sqrt{(n+1)^3}\geqslant\frac{2}{5}\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\sqrt{n+1}\,. \qquad (3)$$

Przekształcanie nierówności (3) prowadzi kolejno do nierówności równoważnych:

$$\frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n}+\sqrt{(n+1)^3}\geqslant\frac{2}{5}\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\sqrt{n+1}\,, \qquad \Big| : \sqrt{(n+1)^3}$$

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{n\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}+1\geqslant\frac{2}{5}\cdot(n+2)\,,$$

$$\frac{2\cdot n\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}+5\geqslant 2\cdot(n+2)\,,$$

$$\frac{2\cdot n\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\geqslant 2n-1\,,$$

$$2\cdot n\cdot\sqrt{n}\geqslant(2n-1)\cdot\sqrt{n+1}\,,$$

$$4\cdot n^3\geqslant(2n-1)^2\cdot(n+1)\,,$$

$$(2n)^3 \geqslant (2n-1)^2 \cdot (2n+2)\,,$$

a ta nierówność jest prawdziwa jako odpowiednio przekształcona nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną liczb $2n-1$, $2n-1$ i $2n+2$.

Analogicznie postępujemy dla dowodu prawej nierówności (2). Korzystając z prawej nierówności założenia indukcyjnego (1) otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{k^3} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k^3} + \sqrt{(n+1)^3} < \frac{2}{5} \cdot n \cdot (n+1) \cdot \sqrt{n+1} + \sqrt{(n+1)^3}\,,$$

a więc do zakończenia dowodu prawej nierówności (2) wystarczy dowieść, że

$$\frac{2}{5} \cdot n \cdot (n+1) \cdot \sqrt{n+1} + \sqrt{(n+1)^3} \leqslant \frac{2}{5} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \sqrt{n+2}\,. \tag{4}$$

Przekształcanie nierówności (4) prowadzi kolejno do nierówności równoważnych:

$$\frac{2}{5} \cdot n \cdot (n+1) \cdot \sqrt{n+1} + \sqrt{(n+1)^3} \leqslant \frac{2}{5} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \sqrt{n+2}\,, \qquad \Big| : \sqrt{(n+1)^3}$$

$$\frac{2}{5} \cdot n + 1 \leqslant \frac{2}{5} \cdot \frac{(n+2) \cdot \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}\,,$$

$$2 \cdot n + 5 \leqslant \frac{2 \cdot (n+2) \cdot \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}\,,$$

$$(2n+5) \cdot \sqrt{n+1} \leqslant 2 \cdot (n+2) \cdot \sqrt{n+2}\,,$$

$$(2n+5)^2 \cdot (n+1) \leqslant 4 \cdot (n+2)^3\,,$$

$$2 \cdot (2n+5)^2 \cdot (n+1) \leqslant 8 \cdot (n+2)^3\,,$$

$$(2n+5)^2 \cdot (2n+2) \leqslant (2n+4)^3\,,$$

a ta nierówność jest prawdziwa jako odpowiednio przekształcona nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną liczb $2n+5$, $2n+5$ i $2n+2$.

Na mocy zasady indukcji matematycznej dane w zadaniu nierówności zostały udowodnione dla każdej liczby naturalnej n.

653. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+5) \cdot \binom{2n}{n} > 9 \cdot 4^{n-1}\,.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

1° (w tej chwili wydaje nam się, że jest to pierwszy krok indukcyjny) Dla $n=1$ mamy

$$L = (n+5) \cdot \binom{2n}{n} = 6 \cdot \binom{2}{1} = 6 \cdot 2 = 12$$

oraz

$$P = 9 \cdot 4^{n-1} = 9 \cdot 4^0 = 9\,,$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $12>9$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n+5)\cdot\binom{2n}{n}>9\cdot4^{n-1}\,.$$

Chcemy wykazać, że

$$(n+6)\cdot\binom{2n+2}{n+1}>9\cdot4^{n}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$(n+6)\cdot\binom{2n+2}{n+1}=\frac{(n+6)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}=\frac{(n+6)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)}=$$

$$=(n+5)\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{(n+6)(2n+1)(2n+2)}{(n+5)(n+1)^2}=(n+5)\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{2(n+6)(2n+1)}{(n+5)(n+1)}>$$

$$>9\cdot4^{n-1}\cdot\frac{2(n+6)(2n+1)}{(n+5)(n+1)}\geqslant 9\cdot4^{n-1}\cdot4=9\cdot4^{n}\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n+6)(2n+1)}{(n+5)(n+1)}\geqslant 4\,.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$2(n+6)(2n+1)\geqslant 4(n+5)(n+1)\,,$$

$$(n+6)(2n+1)\geqslant 2(n+5)(n+1)\,,$$

$$2n^2+n+12n+6\geqslant 2\left(n^2+n+5n+5\right)\,,$$

$$2n^2+13n+6\geqslant 2n^2+12n+10\,,$$

$$n\geqslant 4\,.$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n\geqslant 4$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n=2$ i $n=3$ oraz dla $n=4$. Sprawdzenie dla $n=4$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego, a sprawdzenie dla $n=2$ i $n=3$ weryfikuje dowodzoną nierówność w przypadkach, które dotąd nie zostały sprawdzone, ani też nie wynikają z dowodu indukcyjnego.

Dla $n=2$ otrzymujemy

$$L=7\cdot\binom{4}{2}=7\cdot6=42 \quad\text{oraz}\quad P=9\cdot4^1=36\,,$$

skąd $L>P$.

Dla $n=3$ otrzymujemy

$$L=8\cdot\binom{6}{3}=8\cdot 20=160 \quad \text{oraz} \quad P=9\cdot 4^2=144\,,$$

skąd $L>P$.

1° (to okazuje się być pierwszym krokiem indukcyjnym) Dla $n=4$ otrzymujemy

$$L=9\cdot\binom{8}{4}=9\cdot 70 \quad \text{oraz} \quad P=9\cdot 4^3=9\cdot 64\,,$$

skąd $L>P$.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 4$, a ponadto wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n=1$, $n=2$ i $n=3$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n=4$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{2(n+6)(2n+1)}{(n+5)(n+1)}\geqslant 4$$

w rozwiązaniu pojawi się ostra nierówność

$$\frac{2(n+6)(2n+1)}{(n+5)(n+1)}>4\,, \tag{$\spadesuit$}$$

to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n>4$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n=5$.

654. Skonstruować przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach rzeczywistych, że szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^4$ są zbieżne, a ponadto zachodzą równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=\frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4=\frac{1}{5}\,.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n=cq^{n-1}$, pamiętając, aby $|q|<1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1}=\frac{c}{1-q}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=\sum_{n=1}^{\infty} c^2\left(q^2\right)^{n-1}=\frac{c^2}{1-q^2}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4=\sum_{n=1}^{\infty} c^4\left(q^4\right)^{n-1}=\frac{c^4}{1-q^4}\,,$$

co po uwzględnieniu warunków zadania prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{c}{1-q} &= \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{c^2}{1-q^2} &= \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{c^4}{1-q^4} &= \dfrac{1}{5}\,, \end{cases} \tag{$\spadesuit$}$$

czyli

$$\begin{cases} 2c &= 1-q \\ 2c^2 &= 1-q^2 \\ 5c^4 &= 1-q^4\,. \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy

$$c=\frac{1-q}{2}\,,$$

co po podstawieniu do drugiego równania i uwzględnieniu, że $1-q\neq 0$, daje kolejno

$$2\cdot\frac{(1-q)^2}{2^2}=1-q^2\,,$$

$$\frac{(1-q)^2}{2}=(1-q)\cdot(1+q)\,,$$

$$\frac{1-q}{2}=1+q\,,$$

$$1-q=2+2q\,,$$

$$-1=3q\,,$$

$$q=-1/3\,,\qquad c=2/3\,.$$

Para $(c,\,q)=(2/3,\,-1/3)$ jest jedyną parą liczb spełniającą pierwsze dwa równania układu ($\spadesuit$). Należy sprawdzić, że spełnia ona także trzecie równanie tego układu:

$$\frac{c^4}{1-q^4}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4}{1-\left(\frac{-1}{3}\right)^4}=\frac{16/81}{80/81}=\frac{1}{5}\,.$$

Otrzymane rozwiązanie $q=-1/3$, $c=2/3$ prowadzi do

$$a_n=cq^{n-1}=\frac{2\cdot(-1)^{n-1}}{3^n}\,.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n-1}}{3^n}\,.$$

Uwaga: Nie istnieje szereg o wyrazach nieujemnych spełniający warunki zadania, gdyż dla dowolnego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach nieujemnych zachodzi nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)^2\,.$$

655. Udowodnić, że liczba rzeczywista $q>1$ spełniająca równanie $q^{q^2}=256$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że dana w zadaniu liczba jest wymierna i zapiszmy ją w postaci ułamka nieskracalnego m/n o naturalnym liczniku i mianowniku.

Przekształcanie danego w zadaniu równania prowadzi kolejno do:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{m^2/n^2}=256\,,$$

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{m^2}=256^{n^2}\,,$$

$$m^{m^2}=256^{n^2}\cdot n^{m^2}\,. \tag{5}$$

Gdyby liczba n była większa od 1, miałaby dzielnik pierwszy p. Ponieważ prawa strona równości (5) byłaby podzielna przez p, także lewa strona byłaby podzielna przez p, skąd wynika, że liczba m byłaby podzielna przez p. Ponieważ jednak z założenia liczby m i n są względnie pierwsze, taka sytuacja nie jest możliwa, co dowodzi, że $n=1$.

Zatem liczba $q=m$ jest całkowita. Pozostaje zauważyć, że

$$2^{2^2}=16<256=2^8<3^9=3^{3^2}\,,$$

skąd

$$2<q<3\,,$$

co stoi w sprzeczności z uzyskanym wnioskiem, że q jest liczbą całkowitą.

Otrzymana sprzeczność kończy dowód nie wprost.

656. Dobrać odpowiednią liczbę rzeczywistą k oraz liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzą nierówności

$$C\cdot x^k\leqslant\left(4\cdot\sqrt{16x+9}-3\cdot\sqrt{9x+16}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)\leqslant 3C\cdot x^k\,.$$

Rozwiązanie:

Zastosowanie wzoru na różnicę kwadratów pozwala przekształcić szacowane wyrażenie w następujący sposób:

$$\left(4\cdot\sqrt{16x+9}-3\cdot\sqrt{9x+16}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)=\frac{175x\cdot(\sqrt{x}+1)}{4\cdot\sqrt{16x+9}+3\cdot\sqrt{9x+16}}\,.$$

W przypadku, gdy $x\geqslant 1$, wykonujemy następujące szacowania:

$$5x=\frac{175x\cdot\sqrt{x}}{35\cdot\sqrt{x}}=\frac{175x\cdot(\sqrt{x}+0)}{4\cdot\sqrt{16x+9x}+3\cdot\sqrt{9x+16x}}\leqslant\frac{175x\cdot(\sqrt{x}+1)}{4\cdot\sqrt{16x+9}+3\cdot\sqrt{9x+16}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{175x\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x})}{4\cdot\sqrt{16x+0}+3\cdot\sqrt{9x+0}}=\frac{350x\cdot\sqrt{x}}{25\cdot\sqrt{x}}=14x<15x\,.$$

Natomiast w przypadku, gdy $0<x<1$, oszacowania wyglądają następująco:

$$5x=\frac{175x}{35}=\frac{175x\cdot(0+1)}{4\cdot\sqrt{16+9}+3\cdot\sqrt{9+16}}\leqslant\frac{175x\cdot(\sqrt{x}+1)}{4\cdot\sqrt{16x+9}+3\cdot\sqrt{9x+16}}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{175x\cdot(1+1)}{4\cdot\sqrt{0+9}+3\cdot\sqrt{0+16}}=\frac{350x}{24}<\frac{360x}{24}=15x\,.$$

Zatem dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzą nierówności

$$5\cdot x \leqslant \left(4\cdot\sqrt{16x+9}-3\cdot\sqrt{9x+16}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right) \leqslant 15\cdot x\,,$$

można więc przyjąć $k=1$ oraz $C=5$.

W każdym z kolejnych zadań zadań podaj granicę (lub granicę niewłaściwą) ciągu. Liczby wymierne podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

657. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+3+4+\ldots+k+\ldots+n}{1+3+5+7+\ldots+(2k+1)+\ldots+(2n+1)}=\mathbf{1/2}$

658. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+3+4+\ldots+k+\ldots+(2n+1)}{1+3+5+7+\ldots+(2k+1)+\ldots+(2n+1)}=\mathbf{2}$

659. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+3+4+\ldots+k+\ldots+2^n}{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+4^n}=\mathbf{3/8}$

660. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+4^n}{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+4^n}=\mathbf{3/2}$

661. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+8^n}{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+8^n}=\mathbf{7/4}$

662. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+2^n\right)^2}{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+4^n}=\mathbf{3}$

663. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+64^n}{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+64^n}=\mathbf{3/2}$

664. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+64^n}{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+64^n}=\mathbf{7/6}$

665. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+64^n}{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+64^n}=\mathbf{7/4}$

666. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+64^n}{1+64+4096+\ldots+64^k+\ldots+64^n}=\mathbf{9/8}$

667. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+64^n}{1+64+4096+\ldots+64^k+\ldots+64^n}=\mathbf{21/16}$