Zadania do omówienia na ćwiczeniach
w piątek 29.01.2021 i poniedziałek 1.02.2021.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

652. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^3} < \frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+1}\,.$$

653. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+5)\cdot\binom{2n}{n} > 9\cdot 4^{n-1}\,.$$

654. Skonstruować przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach rzeczywistych, że szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^4$ są zbieżne, a ponadto zachodzą równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 = \frac{1}{5}\,.$$

655. Udowodnić, że liczba rzeczywista $q>1$ spełniająca równanie $q^{q^2}=256$ jest niewymierna.

656. Dobrać odpowiednią liczbę rzeczywistą k oraz liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzą nierówności

$$C\cdot x^k \leqslant \left(4\cdot\sqrt{16x+9}-3\cdot\sqrt{9x+16}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right) \leqslant 3C\cdot x^k\,.$$

W każdym z kolejnych zadań zadań podaj granicę (lub granicę niewłaściwą) ciągu. Liczby wymierne podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

657. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+3+4+\ldots+k+\ldots+n}{1+3+5+7+\ldots+(2k+1)+\ldots+(2n+1)}=$ ....

658. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+3+4+\ldots+k+\ldots+(2n+1)}{1+3+5+7+\ldots+(2k+1)+\ldots+(2n+1)}=$ ....

659. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+3+4+\ldots+k+\ldots+2^n}{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+4^n}=$ ....

660. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+4^n}{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+4^n}=$ ....

661. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+8^n}{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+8^n}=$ ....

662. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+2^n\right)^2}{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+4^n}=$ ....

663. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+64^n}{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+64^n}=$ ....

664. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+64^n}{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+64^n}=$ ....

665. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+64^n}{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+64^n}=$ ....

666. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+64^n}{1+64+4096+\ldots+64^k+\ldots+64^n}=$ ....

667. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+64^n}{1+64+4096+\ldots+64^k+\ldots+64^n}=$ ....