645. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 4$ zachodzi nierówność

$$\binom{n+3}{7} < \frac{n^7}{7!}\,.$$

Rozwiązanie:

Korzystając z równości

$$\binom{n+3}{7} = \frac{(n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{7!}$$

zapiszemy dowodzoną nierówność w postaci

$$\frac{(n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{7!} < \frac{n^7}{7!}\,.$$

Tezę zadania otrzymujemy mnożąc stronami trzy nierówności

$$(n-3)\cdot(n+3) < n^2\,,$$
$$(n-2)\cdot(n+2) < n^2\,,$$
$$(n-1)\cdot(n+1) < n^2$$

oraz równość

$$\frac{n}{7!} = \frac{n}{7!}\,.$$

Należy wyjaśnić, że nierówność

$$(n-k)\cdot(n+k) < n^2$$

wynika łatwo ze wzoru na różnicę kwadratów

$$(n-k)\cdot(n+k) = n^2-k^2 < n^2\,.$$

Można ją też otrzymać powołując się na nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną dwóch liczb w następującej wersji: Iloczyn dwóch liczb dodatnich o ustalonej sumie jest największy, gdy liczby te są równe.

646. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} i^7 < \frac{n^4\cdot(n+1)^4}{8}\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ mamy $L=1$ oraz $P=2$, skąd $L<P$.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\sum_{i=1}^{n} i^7 < \frac{n^4\cdot(n+1)^4}{8}\,.$$

Wykażemy, że wówczas

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^7 < \frac{(n+1)^4\cdot(n+2)^4}{8}\,. \qquad (\clubsuit)$$

Wychodząc od lewej strony równości (♣) i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$L=\sum_{i=1}^{n+1}i^7=\sum_{i=1}^{n}i^7+(n+1)^7<\frac{n^4\cdot(n+1)^4}{8}+(n+1)^7=\frac{(n+1)^4}{8}\cdot\left(n^4+8\cdot(n+1)^3\right)=$$

$$=\frac{(n+1)^4}{8}\cdot\left(n^4+8n^3+24n^2+24n+8\right)<$$

$$<\frac{(n+1)^4}{8}\cdot\left(n^4+8n^3+24n^2+32n+16\right)=\frac{(n+1)^4\cdot(n+2)^4}{8}=P\,.$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla każdego n naturalnego.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.

647. Liczby wymierne dodatnie a i b spełniają warunek $a^b=2$. Dowieść, że liczby a i $1/b$ są całkowite.

Rozwiązanie:

Zapiszmy liczby a i b w postaci ułamków nieskracalnych o naturalnym liczniku i mianowniku:

$$a=\frac{m}{n}\,,\qquad b=\frac{s}{t}\,.$$

Otrzymujemy wówczas kolejno:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{s/t}=2\,,$$

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{s}=2^t\,,$$

$$m^s=2^t\cdot n^s\,. \qquad (\heartsuit)$$

Dowód całkowitości liczby **a***, czyli równości* $\mathbf{n=1}$ *(dowód nie wprost):*

Jeżeli liczba n jest większa od 1, to ma dzielnik pierwszy, oznaczmy go przez p. Wówczas prawa strona równości (♡) jest podzielna przez p, a zatem lewa strona też jest podzielna przez p. Skoro jednak liczba m^s jest podzielna przez liczbę pierwszą p, to także m jest podzielne przez p, co przeczy założeniu, że liczby m i n są względnie pierwsze.

Dowód całkowitości liczby $\mathbf{1/b}$*:*

Skoro wiemy już, że $n=1$, równanie (♡) przyjmuje postać

$$m^s=2^t\,. \qquad (\diamondsuit)$$

Stąd wynika, że m jest potęgą dwójki o wykładniku naturalnym, powiedzmy $m=2^k$, co po podstawieniu do równania (♢) daje

$$2^{ks}=2^t\,.$$

Wobec tego $ks=t$, skąd $k=t/s=1/b$ jest liczbą całkowitą.

648. Podać przykład takiego niepustego zbioru ograniczonego A, że $0<\sup A<1$ oraz $\sup\left\{a^2:\,a\in A\right\}=\sup A$.

Rozwiązanie:

Przykładem zbioru spełniającego warunki zadania jest zbiór $A=\{-1/2, 1/4\}$. Wówczas $\sup A=1/4$, a przy tym zbiór $\{a^2: a\in A\}=\{1/16, 1/4\}$ również ma kres górny $1/4$.

649. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3=\frac{7}{2}\,.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n=cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c>0$ oraz $0<q<1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1}=\frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3=\sum_{n=1}^{\infty} c^3\left(q^3\right)^{n-1}=\frac{c^3}{1-q^3}\,,$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{c}{1-q}=\dfrac{7}{2} \\ \dfrac{c^3}{1-q^3}=\dfrac{7}{2}\,, \end{cases} \tag{$\spadesuit$}$$

czyli

$$\begin{cases} 2c=7(1-q) \\ 2c^3=7\left(1-q^3\right)\,. \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy

$$c=\frac{7(1-q)}{2}\,,$$

co po podstawieniu do drugiego równania daje kolejno

$$2\frac{7^3(1-q)^3}{2^3}=7\left(1-q^3\right)$$

$$\frac{7^2(1-q)^3}{4}=1-q^3$$

$$7^2(1-q)^3=4(1-q)\left(1+q+q^2\right)$$

$$7^2(1-q)^2=4\left(1+q+q^2\right)$$

$$49q^2-98q+49=4q^2+4q+4$$

$$45q^2-102q+45=0 \tag{$\heartsuit$}$$

$$15q^2-34q+15=0\,.$$

Otrzymane równanie kwadratowe ma rozwiązania

$$q=\frac{34\pm\sqrt{34^2-4\cdot15\cdot15}}{30}=\frac{17\pm\sqrt{17^2-15^2}}{15}=\frac{17\pm\sqrt{(17-15)(17+15)}}{15}=$$

$$=\frac{17\pm\sqrt{2\cdot 32}}{15}=\frac{17\pm\sqrt{64}}{15}=\frac{17\pm 8}{15},$$

co wobec warunku $q<1$ wymaga przyjęcia ”$\pm$”=”$-$”. Ostatecznie otrzymujemy

$$q=\frac{17-8}{15}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5},$$

skąd

$$c=\frac{7(1-q)}{2}=\frac{7}{5}.$$

Otrzymane rozwiązanie $q=3/5$, $c=7/5$ prowadzi do

$$a_n=cq^{n-1}=\frac{7\cdot 3^{n-1}}{5^n}.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7\cdot 3^{n-1}}{5^n}.$$

650. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[3]{x^3+10^3}$. Dowieść, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej C istnieją takie liczby rzeczywiste x, y, że

$$|f(x)-f(y)|>C\cdot|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Przyjmijmy $x=-10$ oraz $y=-10-\varepsilon$, gdzie liczba rzeczywista dodatnia ε będzie sprecyzowana później. Wówczas $|x-y|=\varepsilon$, a ponadto

$$|f(x)-f(y)|=\sqrt[3]{300\varepsilon+30\varepsilon^2+\varepsilon^3}>\sqrt[3]{300\varepsilon}>\sqrt[3]{289\varepsilon}=\sqrt[3]{289}\cdot\sqrt[3]{\varepsilon}=\frac{\sqrt[3]{289}}{\varepsilon^{2/3}}\cdot\varepsilon=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{289}}{\varepsilon^{2/3}}\cdot|x-y|=C\cdot|x-y|\,,$$

o ile założymy, że

$$C=\frac{\sqrt[3]{289}}{\varepsilon^{2/3}},$$

czyli kolejno

$$\varepsilon^{2/3}=\frac{\sqrt[3]{289}}{C},$$

$$\varepsilon=\left(\frac{\sqrt[3]{289}}{C}\right)^{3/2},$$

$$\varepsilon=\frac{17}{C^{3/2}}.$$

651. Interesują nas funkcje $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ spełniające warunek

$$f(x)=(1+x)^{1/x}\quad\text{dla}\quad x\in(-1,+\infty)\setminus\{0\}\,. \qquad (*)$$

a) Udowodnić, że istnieje funkcja ciągła f spełniająca warunek $(*)$ i obliczyć $f(0)$ dla tej funkcji f.

Rozwiązanie:
Podstawiając w granicy

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$$

$t=1/x$, czyli $x=1/t$, otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}=e\,.$$

Ponadto

$$\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\right)=e\cdot 1=e\,.$$

Mamy więc

$$\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e\,,$$

co po podstawieniu $t=1/x$, czyli $x=1/t$, daje

$$\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{1/x}=e\,.$$

Stąd otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e\,,$$

co po przyjęciu $f(0)=e$ prowadzi do funkcji ciągłej f.

b) Dla funkcji ciągłej f spełniającej warunek $(*)$ obliczyć pochodną $f'(0)$ albo wykazać, że f jest nieróżniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:
Zauważmy najpierw, że dla $x\in(-1,\,+\infty)\setminus\{0\}$ mamy

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(1+x)^{1/x}=\frac{d}{dx}e^{(1/x)\cdot\ln(1+x)}=e^{(1/x)\cdot\ln(1+x)}\cdot\frac{d}{dx}\left((1/x)\cdot\ln(1+x)\right)=$$

$$=(1+x)^{1/x}\cdot\left(-\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\frac{1}{x\cdot(x+1)}\right)\,.$$

Zastosowanie reguły de l'Hospitala do definicji pochodnej funkcji f w zerze daje

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\overset{\text{d'H}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-0}{1}=\lim_{h\to 0}f'(h)=\lim_{x\to 0}f'(x)\,,$$

ale można też od razu powołać się na ogólną równość $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ prawdziwą, gdy f jest różniczkowalna wokół zera i ciągła w zerze.

Z pomocą reguły de l'Hospitala wyliczamy

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left((1+x)^{1/x}\cdot\left(-\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\frac{1}{x\cdot(x+1)}\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\frac{1}{x\cdot(x+1)}\right)=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\cdot\ln(1+x)}{x^2\cdot(x+1)}\overset{\text{d'H}}{=}$$

$$\overset{\text{d'H}}{=}e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-(1+x)/(1+x)}{3x^2+2x}=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{3x^2+2x}\overset{\text{d'H}}{=}e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-1/(1+x)}{6x+2}=-\frac{e}{2}\,.$$