**Zadania do omówienia na ćwiczeniach
w czwartek 28.01.2021 i wtorek 2.02.2021.**

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

645. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 4$ zachodzi nierówność
$$\binom{n+3}{7} < \frac{n^7}{7!}\,.$$

646. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność
$$\sum_{i=1}^{n} i^7 < \frac{n^4\cdot(n+1)^4}{8}\,.$$

647. Liczby wymierne dodatnie a i b spełniają warunek $a^b=2$. Dowieść, że liczby a i $1/b$ są całkowite.

648. Podać przykład takiego niepustego zbioru ograniczonego A, że $0<\sup A<1$ oraz $\sup\{a^2: a\in A\}=\sup A$.

649. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \frac{7}{2}\,.$$

650. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[3]{x^3+10^3}$. Dowieść, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej C istnieją takie liczby rzeczywiste x, y, że
$$|f(x)-f(y)|>C\cdot|x-y|\,.$$

651. Interesują nas funkcje $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ spełniające warunek
$$f(x)=(1+x)^{1/x} \quad \text{dla} \quad x\in(-1,+\infty)\setminus\{0\}\,. \qquad (*)$$

a) Udowodnić, że istnieje funkcja ciągła f spełniająca warunek $(*)$ i obliczyć $f(0)$ dla tej funkcji f.

b) Dla funkcji ciągłej f spełniającej warunek $(*)$ obliczyć pochodną $f'(0)$ albo wykazać, że f jest nieróżniczkowalna w zerze.