W każdym z kolejnych 4 zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg).

592. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\mathbf{-6}$ $f_1^{(4)}(2)=\mathbf{-3/8}$ $f_1^{(4)}(3)=\mathbf{-2/27}$

593. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\mathbf{4}$ $f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{8}$ $f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathbf{0}$

594. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\mathbf{-15}$ $f_3^{(4)}(4)=\mathbf{-5/9}$ $f_3^{(4)}(12)=\mathbf{-3/25}$

595. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\mathbf{9/16}$ $f_4^{(4)}(3)=\mathbf{9/2^9}=\mathbf{9/512}$ $f_4^{(4)}(8)=\mathbf{1/(16\cdot 27)}=\mathbf{1/432}$

Wstawić znak "$<$" albo "$>$" i udowodnić powstałą nierówność:

596. $e^x > 1+x$ dla $x>0$

597. $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}$ dla $x>0$

598. $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ dla $x>0$

599. $\ln(x+1) < x$ dla $x>0$

600. $\ln(x+1) > x-\frac{x^2}{2}$ dla $x>0$

601. $\ln(x+1) < x$ dla $-1<x<0$

602. $\ln(x+1) < x-\frac{x^2}{2}$ dla $-1<x<0$

603. $\ln(x+1) < x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ dla $x>0$

604. $\ln(x+1) < x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ dla $-1<x<0$

605. $\ln(x+1) > \frac{x}{2}$ dla $0<x<2$

606. $\operatorname{arctg} x < x$ dla $x>0$

607. $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi x}{4}$ dla $0<x<1$

608. $\sin x < x$ dla $x>0$

609. $\cos x > 1-\frac{x^2}{2}$ dla $x>0$

610. $\sin x > x-\frac{x^3}{6}$ dla $x>0$

611. $\cos x < 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ dla $x>0$

612. $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ dla $0<x<\frac{\pi}{2}$

613. $\sin x > \frac{3x}{\pi}$ dla $0<x<\frac{\pi}{6}$

614. Funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ma w przedziale $D_f=[a,b]$ ciągłe pochodne do rzędu trzeciego włącznie (na końcach przedziału ma pochodne jednostronne równe odpowiednim granicom jednostronnym odpowiednich pochodnych).

a) Czy funkcja f ma w punkcie a ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

(i) $f'(a^+)>0$ **MIN**

(ii) $f'(a^+)<0$ **MAX**

(iii) $f'(a^+)=0,\ \ f''(a^+)>0$ **MIN**

(iv) $f'(a^+)=0,\ \ f''(a^+)<0$ **MAX**

(v) $f'(a^+)=f''(a^+)=0,\ \ f'''(a^+)>0$ **MIN**

(vi) $f'(a^+)=f''(a^+)=0,\ \ f'''(a^+)<0$ **MAX**

b) Czy funkcja f ma w punkcie b ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

(vii) $f'(b^-)>0$ **MAX**

(viii) $f'(b^-)<0$ **MIN**

(ix) $f'(b^-)=0,\ \ f''(b^-)>0$ **MIN**

(x) $f'(b^-)=0,\ \ f''(b^-)<0$ **MAX**

(xi) $f'(b^-)=f''(b^-)=0,\ \ f'''(b^-)>0$ **MAX**

(xii) $f'(b^-)=f''(b^-)=0,\ \ f'''(b^-)<0$ **MIN**

615. Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu 2019 funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x)=e^x\cdot\sin x\,.$$

Otrzymany wzór powienien mieć prostą postać, bez znaku "$\sum$", z co najwyżej dwoma znakami "$+$" i co najwyżej dwoma znakami "$-$".

Rozwiązanie:

Obliczając kolejne pochodne funkcji f otrzymujemy

$$f'(x)=e^x\cdot\sin x+e^x\cdot\cos x\,,$$

$$f''(x)=e^x\cdot\sin x+e^x\cdot\cos x+e^x\cdot\cos x-e^x\cdot\sin x=2\cdot e^x\cdot\cos x\,,$$

$$f'''(x)=2\cdot e^x\cdot\cos x-2\cdot e^x\cdot\sin x\,,$$

$$f^{(4)}(x)=2\cdot e^x\cdot\cos x-2\cdot e^x\cdot\sin x-2\cdot e^x\cdot\sin x-2\cdot e^x\cdot\cos x=-4\cdot e^x\cdot\sin x=-4\cdot f(x)\,,$$

skąd wynika, że czterokrotne zróżniczkowanie funkcji f jest równoważne z pomnożeniem jej przez -4.

Wobec tego

$$f^{(2019)}(x)=\frac{d^3}{dx^3}f^{(2016)}(x)=\frac{d^3}{dx^3}f^{(4\cdot504)}(x)=\frac{d^3}{dx^3}(-4)^{504}f(x)=2^{1008}\cdot f'''(x)=$$

$$=2^{1008}\cdot(2\cdot e^x\cdot\cos x-2\cdot e^x\cdot\sin x)=2^{1009}\cdot e^x\cdot(\cos x-\sin x)\,.$$