573. Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x\leqslant 0 \\ W(x) & \text{dla} \quad 0<x<1 \\ x & \text{dla} \quad x\geqslant 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

Rozwiązanie:

Niech

$$W(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+g\,.$$

Aby funkcja f była dwukrotnie różniczkowalna w zerze, muszą zachodzić warunki

$$W(0)=W'(0)=W''(0)=0\,,$$

skąd

$$d=e=g=0$$

i w konsekwencji

$$W(x)=ax^5+bx^4+cx^3\,.$$

Dwukrotną różniczkowalność funkcji f w jedynce otrzymamy pod warunkiem

$$W(1)=W'(1)=1 \qquad \text{oraz} \qquad W''(1)=0\,,$$

co wobec

$$W'(x)=5ax^4+4bx^3+3cx^2$$

oraz

$$W''(x)=20ax^3+12bx^2+6cx$$

prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} a+b+c & = & 1 \\ 5a+4b+3c & = & 1 \\ 20a+12b+6c & = & 0 \end{cases}$$

który ma rozwiązanie $a=3$, $b=-8$, $c=6$.

Odpowiedź: Wielomianem spełniającym warunki zadania jest $W(x)=3x^5-8x^4+6x^3$.

574. Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \text{dla} \quad x\leqslant -1 \\ W(x) & \text{dla} \quad -1<x<1 \\ 1 & \text{dla} \quad x\geqslant 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

Rozwiązanie:

Niech

$$W(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+g\,.$$

Aby funkcja f była dwukrotnie różniczkowalna w punkcie -1, muszą zachodzić warunki

$$W(-1)=-1 \qquad \text{oraz} \qquad W'(-1)=W''(-1)=0\,.$$

Dwukrotną różniczkowalność funkcji f w jedynce otrzymamy pod warunkiem

$$W(1)=1 \qquad \text{oraz} \qquad W'(1)=W''(1)=0\,,$$

co wobec

$$W'(x)=5ax^4+4bx^3+3cx^2+2dx+e$$

oraz

$$W''(x)=20ax^3+12bx^2+6cx+2d$$

prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} -a+b-c+d-e+g &= -1 \\ a+b+c+d+e+g &= 1 \\ 5a-4b+3c-2d+e &= 0 \\ 5a+4b+3c+2d+e &= 0 \\ -20a+12b-6c+2d &= 0 \\ 20a+12b+6c+2d &= 0 \end{cases} \tag{1}$$

Dodanie stronami równań pierwszego i drugiego, odjęcie trzeciego i czwartego, dodanie piątego i szóstego daje po uproszczeniu

$$\begin{cases} b+d+g &= 0 \\ 2b+d &= 0 \\ 6b+d &= 0 \end{cases}$$

Stąd łatwo otrzymujemy $b=d=g=0$. W konsekwencji układ równań (1) po uproszczeniu przyjmuje postać

$$\begin{cases} a+c+e &= 1 \\ 5a+3c+e &= 0 \\ 10a+3c &= 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest $a=3/8$, $c=-5/4$, $e=15/8$.

Odpowiedź: Wielomianem spełniającym warunki zadania jest

$$W(x)=\frac{3x^5-10x^3+15x}{8}\,.$$

575. Niech

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

a) Dla której wartości parametru A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?
b) Dla tej samej wartości parametru A wyznaczyć $f''(0)$.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^h-1}{h}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1-A\cdot h}{h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-A}{2h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{1-A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=1$. Wówczas możemy po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h}{2}=\frac{1}{2}\,.$$

W celu obliczenia pochodnej drugiego rzędu w zerze musimy najpierw obliczyć pierwszą pochodną poza zerem:

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x+1}{x^2}\,.$$

Z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^h\cdot h-e^h+1}{h^2}-1/2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h\cdot h-e^h+1-\frac{h^2}{2}}{h^3}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h\cdot h+e^h-e^h-h}{3h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h\cdot h-h}{3h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{3h}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc ponownie zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h}{3}=\frac{1}{3}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=1$ i wówczas $f'(0)=1/2$ oraz $f''(0)=1/3$.

576. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2}$. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią C, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|\ .$$

Rozwiązanie:

Pominąwszy trywialny przypadek $x=y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|\cdot|f'(c)|\ ,$$

gdzie c leży pomiędzy x i y.

Zatem najmniejsza stała C, z którą prawdziwa jest nierówność podana w treści zadania, jest równa kresowi górnemu zbioru $\{|f'(x)|: x\in\mathbb{R}\}$.

Obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x)=\frac{2x}{3\cdot\left(x^2+2\right)^{2/3}}\ .$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{3\cdot\left(x^2+2\right)^{2/3}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^{-1/3}}{3\cdot\left(1+2\cdot x^{-2}\right)^{2/3}}=0\,.$$

Ponadto

$$f''(x)=\frac{2}{3\cdot\left(x^2+2\right)^{2/3}}-\frac{8x^2}{9\cdot\left(x^2+2\right)^{5/3}}\ .$$

Rozwiązujemy równanie na zerowanie się f'':

$$\frac{2}{3\cdot\left(x^2+2\right)^{2/3}}=\frac{8x^2}{9\cdot\left(x^2+2\right)^{5/3}}\ ,$$

$$3\cdot\left(x^2+2\right)=4x^2\ ,$$

$$6=x^2\ ,$$

$$x=\pm\sqrt{6}\,.$$

Wyliczamy wartości funkcji f' w miejscach zerowych jej pochodnej:

$$f'\left(\pm\sqrt{6}\right)=\frac{\pm2\cdot\sqrt{6}}{3\cdot\left(\left(\pm\sqrt{6}\right)^2+2\right)^{2/3}}=\pm\frac{2\cdot\sqrt{6}}{3\cdot8^{2/3}}=\pm\frac{2\cdot\sqrt{6}}{3\cdot4}=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\,.$$

Stąd wynika, że funkcja f' przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio $-1/\sqrt{6}$ i $1/\sqrt{6}$, a zatem $C=1/\sqrt{6}$.

577. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem

$$g(x)=x^5+x\,.$$

Podać dwie pary liczb $(n,\,w)$, gdzie n jest liczbą naturalną (całkowitą dodatnią) mniejszą od 100, a w liczbą wymierną, spełniające równanie

$$f''(n)=w\,.$$

Jeżeli licznik lub mianownik liczby w jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg).

$$f''(\mathbf{2})=-\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{6^3}}=-\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{216}}=-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{54}} \qquad f''(\mathbf{34})=-\frac{\mathbf{160}}{\mathbf{81^3}}=-\frac{\mathbf{160}}{\mathbf{3^{12}}}$$

578. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem

$$g(x)=\frac{x^3}{3}+x\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji f w trzech podanych punktach.

$$f''\left(\frac{4}{3}\right)=-\mathbf{1/4} \qquad f''\left(\frac{14}{3}\right)=-\mathbf{4/125} \qquad f''(12)=-\mathbf{3/500}$$

579. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem

$$g(x)=\frac{x^3}{3}+2x\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji f w czterech podanych punktach.

$$f''\left(\frac{7}{3}\right)=-\mathbf{2/27} \qquad f''\left(\frac{20}{3}\right)=-\mathbf{1/54} \qquad f''(15)=-\mathbf{6/1331} \qquad f''\left(\frac{88}{3}\right)=-\mathbf{1/729}$$

W każdym z kolejnych 10 zadań zapisz w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości trzech pochodnych funkcji w podanym punkcie.

580. $f_1(x)=\sqrt{x}$ $\quad f_1'(25)=\mathbf{1/10}$, $\quad f_1''(25)=-\mathbf{1/500}$, $\quad f_1'''(25)=\mathbf{3/25000}$

581. $f_2(x)=x\cdot\sqrt{x}$ $\quad f_2'(1/4)=\mathbf{3/4}$, $\quad f_2''(1/4)=\mathbf{3/2}$, $\quad f_2'''(1/4)=-\mathbf{3}$

582. $f_3(x)=x^2\cdot\sqrt{x}$ $\quad f_3'(4)=\mathbf{20}$, $\quad f_3''(4)=\mathbf{15/2}$, $\quad f_3'''(4)=\mathbf{15/16}$

583. $f_4(x)=\sqrt[3]{x}$ $\quad f_4'(1)=\mathbf{1/3}$, $\quad f_4''(1)=-\mathbf{2/9}$, $\quad f_4'''(1)=\mathbf{10/27}$

584. $f_5(x)=x\cdot\sqrt[3]{x}$ $f_5'(1/27)=\mathbf{4/9}$, $f_5''(1/27)=\mathbf{4}$, $f_5'''(1/27)=\mathbf{-72}$

585. $f_6(x)=\ln x$ $f_6'(2)=\mathbf{1/2}$, $f_6''(2)=\mathbf{-1/4}$, $f_6'''(2)=\mathbf{1/4}$

586. $f_7(x)=x\cdot\ln x$ $f_7'(1)=\mathbf{1}$, $f_7''(1)=\mathbf{1}$, $f_7'''(1)=\mathbf{-1}$

587. $f_8(x)=\operatorname{arctg} x$ $f_8'(1)=\mathbf{1/2}$, $f_8''(1)=\mathbf{-1/2}$, $f_8'''(1)=\mathbf{1/2}$

588. $f_9(x)=\operatorname{arctg} x$ $f_9'(2)=\mathbf{1/5}$, $f_9''(2)=\mathbf{-4/25}$, $f_9'''(2)=\mathbf{22/125}$

589. $f_{10}(x)=\operatorname{arctg} x$ $f_{10}'(3)=\mathbf{1/10}$, $f_{10}''(3)=\mathbf{-3/50}$, $f_{10}'''(3)=\mathbf{13/250}$

590. Wyznaczyć liczbę naturalną k oraz liczby wymierne a i b, dla których prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Dla dowolnej funkcji trzykrotnie różniczkowalnej $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o dodatniej pochodnej pierwszego rzędu, pochodna trzeciego rzędu funkcji f odwrotnej do g wyraża się wzorem:

$$f'''(g(x))=\frac{a\cdot(g''(x))^2+b\cdot g'(x)\cdot g'''(x)}{(g'(x))^k}\,.$$

Rozwiązanie:

Trzykrotne różniczkowanie stronami równości

$$f(g(x))=x$$

prowadzi kolejno do

$$f'(g(x))\cdot g'(x)=1\,,$$

$$f''(g(x))\cdot(g'(x))^2+f'(g(x))\cdot g''(x)=0\,,$$

$$f'''(g(x))\cdot(g'(x))^3+f''(g(x))\cdot 2\cdot g'(x)\cdot g''(x)+f''(g(x))\cdot g''(x)\cdot g'(x)+f'(g(x))\cdot g'''(x)=0\,,$$

$$f'''(g(x))\cdot(g'(x))^3+3\cdot f''(g(x))\cdot g'(x)\cdot g''(x)+f'(g(x))\cdot g'''(x)=0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy następujące wzory na pochodne funkcji f:

$$f'(g(x))=\frac{1}{g'(x)}\,,$$

$$f''(g(x))=-\frac{f'(g(x))\cdot g''(x)}{(g'(x))^2}=-\frac{g''(x)}{(g'(x))^3}\,,$$

$$f'''(g(x))=-\frac{3\cdot f''(g(x))\cdot g'(x)\cdot g''(x)+f'(g(x))\cdot g'''(x)}{(g'(x))^3}=$$

$$=-\frac{3\cdot\frac{-g''(x)}{(g'(x))^3}\cdot g'(x)\cdot g''(x)+\frac{1}{g'(x)}\cdot g'''(x)}{(g'(x))^3}=\frac{3\cdot(g''(x))^2-g'(x)\cdot g'''(x)}{(g'(x))^5}\,.$$

W konsekwencji szukane liczby to $k=5$, $a=3$ i $b=-1$.