Zadania do omówienia na ćwiczeniach w piątek 15.01.2021 i poniedziałek 18.01.2021.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

573. Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla } x\leqslant 0 \\ W(x) & \text{dla } 0<x<1 \\ x & \text{dla } x\geqslant 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

574. Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \text{dla } x\leqslant -1 \\ W(x) & \text{dla } -1<x<1 \\ 1 & \text{dla } x\geqslant 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

575. Niech

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x} & \text{dla } x\neq 0 \\ A & \text{dla } x=0 \end{cases}$$

a) Dla której wartości parametru A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?
b) Dla tej samej wartości parametru A wyznaczyć $f''(0)$.

576. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2}$. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią C, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|\ .$$

577. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem

$$g(x)=x^5+x\,.$$

Podać dwie pary liczb (n, w), gdzie n jest liczbą naturalną (całkowitą dodatnią) mniejszą od 100, a w liczbą wymierną, spełniające równanie

$$f''(n)=w\,.$$

Jeżeli licznik lub mianownik liczby w jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg).

$f''(\,.............\,)=.............$ $f''(\,.............\,)=.............$

578. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem

$$g(x)=\frac{x^3}{3}+x\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji f w trzech podanych punktach.

$f''\left(\frac{4}{3}\right)=\ldots\ldots\ldots$ $f''\left(\frac{14}{3}\right)=\ldots\ldots\ldots$ $f''(12)=\ldots\ldots\ldots$

579. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem

$$g(x)=\frac{x^3}{3}+2x\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji f w czterech podanych punktach.

$f''\left(\frac{7}{3}\right)=\ldots\ldots$ $f''\left(\frac{20}{3}\right)=\ldots\ldots$ $f''(15)=\ldots\ldots$ $f''\left(\frac{88}{3}\right)=\ldots\ldots$

W każdym z kolejnych 10 zadań zapisz w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości trzech pochodnych funkcji w podanym punkcie.

580. $f_1(x)=\sqrt{x}$ $f_1'(25)=\ldots\ldots\ldots,$ $f_1''(25)=\ldots\ldots\ldots,$ $f_1'''(25)=\ldots\ldots\ldots$

581. $f_2(x)=x\cdot\sqrt{x}$ $f_2'(1/4)=\ldots\ldots\ldots,$ $f_2''(1/4)=\ldots\ldots\ldots,$ $f_2'''(1/4)=\ldots\ldots\ldots$

582. $f_3(x)=x^2\cdot\sqrt{x}$ $f_3'(4)=\ldots\ldots\ldots,$ $f_3''(4)=\ldots\ldots\ldots,$ $f_3'''(4)=\ldots\ldots\ldots$

583. $f_4(x)=\sqrt[3]{x}$ $f_4'(1)=\ldots\ldots\ldots,$ $f_4''(1)=\ldots\ldots\ldots,$ $f_4'''(1)=\ldots\ldots\ldots$

584. $f_5(x)=x\cdot\sqrt[3]{x}$ $f_5'(1/27)=\ldots\ldots,$ $f_5''(1/27)=\ldots\ldots,$ $f_5'''(1/27)=\ldots\ldots$

585. $f_6(x)=\ln x$ $f_6'(2)=\ldots\ldots\ldots,$ $f_6''(2)=\ldots\ldots\ldots,$ $f_6'''(2)=\ldots\ldots\ldots$

586. $f_7(x)=x\cdot\ln x$ $f_7'(1)=\ldots\ldots\ldots,$ $f_7''(1)=\ldots\ldots\ldots,$ $f_7'''(1)=\ldots\ldots\ldots$

587. $f_8(x)=\operatorname{arctg} x$ $f_8'(1)=\ldots\ldots\ldots,$ $f_8''(1)=\ldots\ldots\ldots,$ $f_8'''(1)=\ldots\ldots\ldots$

588. $f_9(x)=\operatorname{arctg} x$ $f_9'(2)=\ldots\ldots\ldots,$ $f_9''(2)=\ldots\ldots\ldots,$ $f_9'''(2)=\ldots\ldots\ldots$

589. $f_{10}(x)=\operatorname{arctg} x$ $f_{10}'(3)=\ldots\ldots\ldots,$ $f_{10}''(3)=\ldots\ldots\ldots,$ $f_{10}'''(3)=\ldots\ldots\ldots$

590. Wyznaczyć liczbę naturalną k oraz liczby wymierne a i b, dla których prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Dla dowolnej funkcji trzykrotnie różniczkowalnej $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o dodatniej pochodnej pierwszego rzędu, pochodna trzeciego rzędu funkcji f odwrotnej do g wyraża się wzorem:

$$f'''(g(x))=\frac{a\cdot\left(g''(x)\right)^2+b\cdot g'(x)\cdot g'''(x)}{\left(g'(x)\right)^k}\,.$$