562. Niech funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem
$$f(x)=\ln x-\sqrt{x}\,.$$
Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:
$$f(16)+f(18) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(17)\ ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy
$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$
oraz
$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$
skąd nierówność $f''(x)>0$ jest równoważna kolejnym nierównościom
$$-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}>0\,,$$
$$\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}>\frac{1}{x^2}\,,$$
$$\sqrt{x}>4\,,$$
$$x>16\,.$$
Zatem f jest ściśle wypukła w przedziale $[16;+\infty)$, skąd
$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right)\,,$$
czyli
$$f(x)+f(y)>2\cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x,y\geqslant 16$.

W szczególności
$$f(16)+f(18)>2\cdot f(17)\,.$$

563. Niech funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem
$$f(x)=\ln x-\sqrt[3]{x}\,.$$
Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:
$$f(89)+f(91) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(90)\ ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy
$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{3\cdot x^{2/3}}$$
oraz
$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{9\cdot x^{5/3}}\,,$$

skąd nierówność $f''(x)<0$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{9\cdot x^{5/3}}<0\,,$$

$$\frac{2}{9\cdot x^{5/3}}<\frac{1}{x^2}\,,$$

$$x^{1/3}<\frac{9}{2}\,,$$

$$x<\frac{9^3}{2^3}=\frac{729}{8}=91,125\,.$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $(0;\,91,125)$, skąd

$$f(x)+f(y)<2\cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x,y<91,125$.

W szczególności

$$f(89)+f(91)<2\cdot f(90)\,.$$

Uwaga: Bezpośrednie obliczenia pokazują, że

$$f(89)+f(91)\approx\mathbf{0,036809}335389$$

oraz

$$2\cdot f(90)\approx\mathbf{0,036809}847546\,,$$

co wydaje się skutecznie odbierać wszelką nadzieję na rozwiązanie zadania poprzez bezpośrednie szacowanie każdej z podanych liczb z osobna.

564. Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(61)+f(63)\qquad\text{czy}\qquad 2\cdot f(62)\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0\,,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8>\sqrt{x}\,,$$

$$x<64\,,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wypukła w interesującym nas przedziale $(0,64)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=61$ oraz $y=63$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(61)+f(63)>2\cdot f(62).$$

Odpowiedź: Liczba $f(61)+f(63)$ jest większa od liczby $2\cdot f(62)$.

565. Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(65)+f(67) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(66)\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x},$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}},$$

$$8>\sqrt{x},$$

$$x<64,$$

co oznacza, że $f''(x)>0$ dla $x\in(0,64)$ oraz $f''(x)>0$ dla $x\in(64,\infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64,\infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wklęsła w interesującym nas przedziale $(64,\infty)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}<f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=65$ oraz $y=67$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(65)+f(67)<2\cdot f(66).$$

Odpowiedź: Liczba $f(65)+f(67)$ jest mniejsza od liczby $2\cdot f(66)$.

566. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$\operatorname{arctg} 100+2\cdot\operatorname{arctg} 103+3\cdot\operatorname{arctg} 106 \qquad \text{czy} \qquad 6\cdot\operatorname{arctg} 104\ ?$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f daną wzorem $f(x)=\operatorname{arctg} x$. Ponieważ jej pochodna $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ jest malejąca na przedziale $(0, +\infty)$, funkcja f jest na tym przedziale ściśle wklęsła.

Zatem na mocy nierówności Jensena dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich x_1, x_2 i x_3 oraz dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a_1, a_2 i a_3 spełniających warunek $a_1+a_2+a_3=1$ zachodzi

$$f\left(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\right)>a_1f\left(x_1\right)+a_2f\left(x_2\right)+a_3f\left(x_3\right)\ ,$$

co dla $x_1=100$, $x_2=103$, $x_3=106$, $a_1=1/6$, $a_2=1/3$, $a_3=1/2$ prowadzi do nierówności

$$f(104)>\frac{f(100)}{6}+\frac{f(103)}{3}+\frac{f(106)}{2}\ ,$$

gdyż wówczas

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=\frac{100}{6}+\frac{103}{3}+\frac{106}{2}=\frac{100+2\cdot 103+3\cdot 106}{6}=\frac{624}{6}=104\,.$$

Mnożąc udowodnioną nierówność stronami przez 6 i podstawiając $f(x)=\operatorname{arctg} x$ otrzymujemy

$$6\cdot\operatorname{arctg} 104>\operatorname{arctg} 100+2\cdot\operatorname{arctg} 103+3\cdot\operatorname{arctg} 106\,.$$

Uwaga:

Bezpośrednie wyliczenia pokazują, że

$$\operatorname{arctg} 100+2\cdot\operatorname{arctg} 103+3\cdot\operatorname{arctg} 106\approx\mathbf{9,367}\mathbf{0}60$$

oraz

$$6\cdot\operatorname{arctg} 104\approx\mathbf{9,3670}87\,.$$

Różnica między porównywanymi liczbami jest więc zbyt mała, aby można sobie wyobrazić ich porównanie bez użycia komputera przez oszacowanie każdej z nich z osobna.

567. Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\operatorname{arctg} 3+\operatorname{arctg} 5+2\cdot\ln 4 \qquad \text{czy} \qquad \ln 3+\ln 5+2\cdot\operatorname{arctg} 4\,.$$

Rozwiązanie:

Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(x)=\operatorname{arctg} x-\ln x$. Wówczas

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{-2x^3+x^4+2x^2+1}{x^2\cdot\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^3\cdot(x-2)+x^4+2x^2+1}{x^2\cdot\left(x^2+1\right)^2}\ ,$$

co na pewno jest dodatnie dla $x>2$. Wobec tego funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(2, +\infty)$. Na mocy nierówności Jensena otrzymujemy więc

$$f(4)<\frac{f(3)+f(5)}{2}\ ,$$

co jest równoważne kolejnym nierównościom:

$$2f(4) < f(3) + f(5),$$

$$2\,\mathrm{arctg}\,4 - 2\ln 4 < \mathrm{arctg}\,3 - \ln 3 + \mathrm{arctg}\,5 - \ln 5,$$

$$2\,\mathrm{arctg}\,4 + \ln 3 + \ln 5 < \mathrm{arctg}\,3 + \mathrm{arctg}\,5 + 2\ln 4.$$

Odpowiedź:

$$\mathrm{arctg}\,3 + \mathrm{arctg}\,5 + 2\cdot\ln 4 \qquad > \qquad \ln 3 + \ln 5 + 2\cdot\mathrm{arctg}\,4.$$

568. Niech funkcja $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = e^{\sqrt[3]{x}},$$

gdzie pierwiastek jest w wykładniku. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(6)+f(8) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(7)\ ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f w przedziale $(0,+\infty)$ otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{3\cdot x^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x) = \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{9\cdot x^{4/3}} - \frac{2\cdot e^{\sqrt[3]{x}}}{9\cdot x^{5/3}},$$

skąd nierówność $f''(x)<0$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$\frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{9\cdot x^{4/3}} - \frac{2\cdot e^{\sqrt[3]{x}}}{9\cdot x^{5/3}} < 0,$$

$$x^{1/3} < 2,$$

$$x < 8.$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $[0;8]$, skąd

$$f(x)+f(y) < 2\cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych nieujemnych $x,y\leqslant 8$.

W szczególności

$$f(6)+f(8) < 2\cdot f(7).$$

569. Niech funkcja $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=e^{\sqrt[4]{x}}\,,$$

gdzie pierwiastek jest w wykładniku. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(79)+f(81)=\mathbf{39,79911}... \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(80)=\mathbf{39,79911}...\ ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{1}{4\cdot x^{3/4}}$$

oraz

$$f''(x)=e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{1}{4\cdot x^{3/4}}\cdot\frac{1}{4\cdot x^{3/4}}-e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{3}{16\cdot x^{7/4}}=e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{x^{1/4}-3}{16\cdot x^{7/4}}\,,$$

skąd nierówność $f''(x)<0$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$x^{1/4}-3<0\,,$$

$$x^{1/4}<3\,,$$

$$x<81\,.$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $[0;81]$, skąd

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}<f\left(\frac{x+y}{2}\right)\,,$$

czyli

$$f(x)+f(y)<2\cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x,y\in[0;81]$.

W szczególności

$$f(79)+f(81)<2\cdot f(80)\,.$$

570. Niech funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{x}-10\ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(1600)+f(1602)=\mathbf{-67,54267816}... \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(1601)=\mathbf{-67,54267816}...\ ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{10}{x}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{10}{x^2}\,,$$

skąd nierówność $f''(x)<0$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{10}{x^2}<0\,,$$

$$\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}>\frac{10}{x^2}\,,$$

$$\sqrt{x}>40\,,$$

$$x>1600\,.$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $[1600;\,+\infty)$, skąd

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}<f\left(\frac{x+y}{2}\right)\,,$$

czyli

$$f(x)+f(y)<2\cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x,y\geqslant 1600$.

W szczególności

$$f(1600)+f(1602)<2\cdot f(1601)\,.$$

571. Niech $f(x)=\sqrt[3]{x^2+432}$. Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(36{,}001)=f(36001/1000)\approx\mathbf{12{,}0001666666667}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{72001}{6000}=12+\frac{1}{6000}\approx\mathbf{12{,}0001666666667}\,.$$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{2x}{3\cdot(x^2+432)^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{2}{3\cdot(x^2+432)^{2/3}}-\frac{8x^2}{9\cdot(x^2+432)^{5/3}}=\frac{6\cdot(x^2+432)}{9\cdot(x^2+432)^{5/3}}-\frac{8x^2}{9\cdot(x^2+432)^{5/3}}=$$

$$\frac{6x^2+6\cdot 432-8x^2}{9\cdot(x^2+432)^{5/3}}=\frac{-2x^2+2\cdot 36^2}{9\cdot(x^2+432)^{5/3}}=\frac{2\cdot(-x^2+36^2)}{9\cdot(x^2+432)^{5/3}}<0$$

dla $x>36$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $[36,\,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>36$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 36. Ponieważ $f(36)=12$ oraz $f'(36)=1/6$, dla $x>36$ zachodzi nierówność $f(x)<12+(x-36)/6$ i w konsekwencji

$$f(36{,}001)<12+\frac{0{,}001}{6}=12+\frac{1}{6000}=\frac{72000}{6000}+\frac{1}{6000}=\frac{72001}{12}\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(36{,}001)$ jest mniejsza od $72001/6000$.

572. Dowieść, że nierówność

$$(n+1)^{3n+3} < n^{2n} \cdot (n+3)^{n+3}$$

zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej $n > 0$.

Rozwiązanie:

Po obustronnym zlogarytmowaniu przy podstawie e dana w zadaniu nierówność przybiera postać

$$3 \cdot f(n+1) < 2 \cdot f(n) + f(n+3)\,, \qquad (\spadesuit)$$

gdzie $f(x) = x \cdot \ln x$ dla $x > 0$. Ponieważ $f'(x) = \ln x + \frac{x}{x} = \ln x + 1$ oraz $f''(x) = 1/x > 0$, funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0, +\infty)$, skąd wynika nierówność

$$f\left(\frac{2}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot y\right) < \frac{2}{3} \cdot f(x) + \frac{1}{3} \cdot f(y)$$

prawdziwa dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y. W szczególności dla $x = n$ oraz $y = n+3$ otrzymujemy

$$f\left(\frac{2}{3} \cdot n + \frac{1}{3} \cdot (n+3)\right) < \frac{2}{3} \cdot f(n) + \frac{1}{3} \cdot f(n+3)\,,$$

czyli

$$f(n+1) < \frac{2}{3} \cdot f(n) + \frac{1}{3} \cdot f(n+3)\,,$$

a to po obustronnym pomnożeniu przez 3 daje nierówność $(\spadesuit)$.