

536. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Funkcja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do f , tzn. $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x .

Podać wzór na pochodną funkcji g . Podać przykład takiej liczby wymiernej $x > 1$, że liczba $g'(x)$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Sposób I:

Równość $g(x) = y$ jest równoważna równości $f(y) = x$, czyli

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

lub inaczej

$$x = \frac{t - \frac{1}{t}}{2}, \quad (\clubsuit)$$

jeśli przyjmiemy $t = e^y$. Przy tych oznaczeniach mamy $t > 0$ i $y = \ln t$. Rozwiązujemy równanie (\clubsuit) tak, aby wyznaczyć t w zależności od x :

$$\begin{aligned} 2xt &= t^2 - 1, \\ t^2 - 2xt - 1 &= 0, \\ t &= \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2}, \\ t &= x \pm \sqrt{x^2 + 1}, \end{aligned}$$

skąd wobec $t > 0$ musimy przyjąć „ \pm ” = „+”. Ostatecznie

$$t = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

i w konsekwencji

$$g(x) = y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Mając jawny wzór określający funkcję g bez trudu obliczamy jej pochodną:

$$g'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Jako przykład liczby wymiernej $x > 1$, dla której $g'(x)$ jest liczbą wymierną, przyjmijmy $x = 4/3$. Otrzymujemy wtedy

$$g'(x) = g'(4/3) = \frac{1}{\sqrt{16/9 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{25/9}} = \frac{3}{5}.$$

Sposób II:

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} f'(y) &= \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \sqrt{\frac{e^{2y} + 2 + e^{-2y}}{4}} = \sqrt{\frac{e^{2y} - 2 + e^{-2y}}{4} + 1} = \sqrt{\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 + 1} = \\ &= \sqrt{(f(y))^2 + 1}. \end{aligned}$$

Ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej otrzymujemy

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\sqrt{(f(g(x)))^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

W powyższych przekształceniach wykorzystaliśmy równość

$$f'(y) = \sqrt{(f(y))^2 + 1}$$

dla $y = g(x)$.

Dla urozmaicenia tym razem jako przykład liczby wymiernej $x > 1$, dla której $g'(x)$ jest liczbą wymierną, przyjmijmy $x = 12/5$. Otrzymujemy wtedy

$$g'(x) = g'(12/5) = \frac{1}{\sqrt{144/25 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{169/25}} = \frac{5}{13}.$$

537. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $g(x) = x^5 + x$. Obliczyć $f'(0)$, $f'(2)$ i $f'(34)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że pochodna funkcji g dana jest wzorem

$$g'(x) = 5x^4 + 1.$$

Zauważmy też, że

$$g(0) = 0, \quad g(1) = 2 \quad \text{oraz} \quad g(2) = 34,$$

skąd odpowiednio

$$f(0) = 0, \quad f(2) = 1 \quad \text{oraz} \quad f(34) = 2.$$

Ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))},$$

co po podstawieniu kolejno $x = 0$, $x = 2$ i $x = 34$ prowadzi odpowiednio do

$$f'(0) = \frac{1}{g'(f(0))} = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{5 \cdot 0^4 + 1} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$f'(2) = \frac{1}{g'(f(2))} = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{5 \cdot 1^4 + 1} = \frac{1}{6}$$

i

$$f'(34) = \frac{1}{g'(f(34))} = \frac{1}{g'(2)} = \frac{1}{5 \cdot 2^4 + 1} = \frac{1}{81}.$$

Odpowiedź:

$$f'(0) = 1, \quad f'(2) = \frac{1}{6} \quad \text{oraz} \quad f'(34) = \frac{1}{81}.$$

538. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $g(x) = x^3 + 9x$. Obliczyć $f'(0)$, $f'(10)$ i $f'(100)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że pochodna funkcji g dana jest wzorem

$$g'(x) = 3x^2 + 9.$$

Zauważmy też, że

$$g(0) = 0, \quad g(1) = 10 \quad \text{oraz} \quad g(4) = 100,$$

skąd odpowiednio

$$f(0) = 0, \quad f(10) = 1 \quad \text{oraz} \quad f(100) = 4.$$

Ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))},$$

co po podstawieniu kolejno $x = 0$, $x = 10$ i $x = 100$ prowadzi odpowiednio do

$$f'(0) = \frac{1}{g'(f(0))} = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{3 \cdot 0^2 + 9} = \frac{1}{9},$$

$$f'(10) = \frac{1}{g'(f(10))} = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{3 \cdot 1^2 + 9} = \frac{1}{12}$$

i

$$f'(100) = \frac{1}{g'(f(100))} = \frac{1}{g'(4)} = \frac{1}{3 \cdot 4^2 + 9} = \frac{1}{57}.$$

Odpowiedź:

$$f'(0) = \frac{1}{9}, \quad f'(10) = \frac{1}{12} \quad \text{oraz} \quad f'(100) = \frac{1}{57}.$$

W każdym z kolejnych 7 zadań funkcja $g_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej podanym wzorem. W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji g_i w trzech podanych punktach.

$$539. \quad f_1(x) = x^3 + x \qquad g'_1(0) = 1 \qquad g'_1(2) = 1/4 \qquad g'_1(130) = 1/76$$

$$540. \quad f_2(x) = x^7 + x \qquad g'_2(0) = 1 \qquad g'_2(2) = 1/8 \qquad g'_2(130) = 1/449$$

$$541. \quad f_3(x) = x^3 + 5x \qquad g'_3(0) = 1/5 \qquad g'_3(6) = 1/8 \qquad g'_3(42) = 1/32$$

$$542. \quad f_4(x) = x^5 + 5x \qquad g'_4(0) = 1/5 \qquad g'_4(6) = 1/10 \qquad g'_4(42) = 1/85$$

$$543. \quad f_5(x) = x^3 + 2x \qquad g'_5(3) = 1/5 \qquad g'_5(12) = 1/14 \qquad g'_5(72) = 1/50$$

$$544. \quad f_6(x) = x^3 + 4x \qquad g'_6(5) = 1/7 \qquad g'_6(16) = 1/16 \qquad g'_6(80) = 1/52$$

$$545. \quad f_7(x) = 2x^3 + x \qquad g'_7(3) = 1/7 \qquad g'_7(18) = 1/25 \qquad g'_7(57) = 1/55$$

W każdym z kolejnych 5 zadań dla podanej funkcji $g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcja $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f_i(g_i(x)) = x^3 + 3x.$$

W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji f_i w trzech podanych punktach.

$$546. \quad g_1(x) = x^3 + x + 6 \quad f'_1(8) = \mathbf{3/2} \quad f'_1(16) = \mathbf{15/13} \quad f'_1(36) = \mathbf{15/14}$$

$$547. \quad g_2(x) = x^3 + 2x + 3 \quad f'_2(6) = \mathbf{6/5} \quad f'_2(15) = \mathbf{15/14} \quad f'_2(36) = \mathbf{30/29}$$

$$548. \quad g_3(x) = 2x^3 + x \quad f'_3(3) = \mathbf{6/7} \quad f'_3(18) = \mathbf{3/5} \quad f'_3(57) = \mathbf{6/11}$$

$$549. \quad g_4(x) = x^5 + x + 2 \quad f'_4(2) = \mathbf{3} \quad f'_4(4) = \mathbf{1} \quad f'_4(36) = \mathbf{5/27}$$

$$550. \quad g_5(x) = x^5 + 2x \quad f'_5(0) = \mathbf{3/2} \quad f'_5(3) = \mathbf{6/7} \quad f'_5(36) = \mathbf{15/82}$$

551. Funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = \ln \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right).$$

Funkcja g jest złożeniem 2020 egzemplarzy funkcji f :

$$g(x) = f(f(f(\dots f(f(x))\dots))).$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'(\sqrt{e})$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Wykresem funkcji f jest krzywa o równaniu

$$y = \ln \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right).$$

Przekształcanie tego równania prowadzi kolejno do równań równoważnych

$$\begin{aligned} e^y &= \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \\ e^x \cdot e^y - e^y &= e^x + 1, \\ e^x \cdot e^y - e^x - e^y &= 1. \end{aligned}$$

Ponieważ ostatnie równanie nie zmienia się przy zamianie x i y , krzywa opisana tym równaniem jest symetryczna względem prostej o równaniu $x = y$. To oznacza, że funkcja f jest odwrotna sama do siebie, czyli $f(f(x)) = x$ dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x . W konsekwencji $g(x) = x$ dla $x > 0$ i $g'(x) = 1$. W szczególności $g'(\sqrt{e}) = 1$ jest liczbą wymierną.

552. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = \operatorname{arctg} \left(\sqrt{e^{e^{x^{2020}}} + 1} + \sqrt{e^{e^{x^{2020}}} - 1} - 1 \right) + \operatorname{arctg} \left(\sqrt{e^{e^{x^{2020}}} + 1} - \sqrt{e^{e^{x^{2020}}} - 1} - 1 \right)$$

na przedziale $[10, 50]$ i określić, w których punktach te wartości są przyjmowane. Doprowadzić wartości najmniejszą i największą do tak prostej postaci, aby było widać, czy są to liczby wymierne, czy niewymierne.

Wskazówka: $f = g \circ h$, gdzie

$$g(t) = \operatorname{arctg}(t-1) + \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{t} - 1 \right)$$

oraz

$$h(x) = \sqrt{e^{e^{x^{2020}}} + 1} + \sqrt{e^{e^{x^{2020}}} - 1}.$$

Rozwiązanie:

Funkcja $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$g(t) = \operatorname{arctg}(t-1) + \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{t} - 1 \right)$$

ma pochodną

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{(t-1)^2+1} + \frac{-2/t^2}{\left(\frac{2}{t}-1\right)^2+1} = \frac{1}{t^2-2t+2} - \frac{2}{(2-t)^2+t^2} = \\ &= \frac{1}{t^2-2t+2} - \frac{2}{4-4t+2t^2} = \frac{1}{t^2-2t+2} - \frac{1}{2-2t+t^2} = 0, \end{aligned}$$

jest więc stała. Ponieważ

$$g(1) = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

mamy $g(t) = \pi/4$ dla każdego $t \in (0, +\infty)$.

Pozostaje zauważyć, że przyjmując

$$t = \sqrt{e^{e^{x^{2020}}} + 1} + \sqrt{e^{e^{x^{2020}}} - 1}$$

otrzymujemy

$$\frac{2}{t} = \sqrt{e^{e^{x^{2020}}} + 1} - \sqrt{e^{e^{x^{2020}}} - 1},$$

skąd

$$f(x) = g(t) = \frac{\pi}{4}.$$

Zatem f jest funkcją stałą równą $\pi/4$. W konsekwencji przyjmuje ona na całym rozważanym przedziale $[10, 50]$ największą (a zarazem najmniejszą) wartość $\pi/4$ (niewymierną, bo π jest niewymierne).

553. Funkcja $f : Z \rightarrow Z$, gdzie $Z = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}.$$

Funkcja g jest złożeniem 666 egzemplarzy funkcji f :

$$g(x) = f(f(f(\dots f(f(x))\dots))).$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'(\sqrt{2})$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Wykresem funkcji f jest krzywa o równaniu

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$$

Przekształcanie tego równania prowadzi kolejno do równań równoważnych

$$\begin{aligned} y^3 &= \frac{x^3}{x^3 - 1}, \\ x^3 y^3 - y^3 &= x^3, \\ x^3 y^3 &= x^3 + y^3. \end{aligned}$$

Ponieważ ostatnie równanie nie zmienia się przy zamianie x i y , krzywa opisana tym równaniem jest symetryczna względem prostej o równaniu $x = y$. To oznacza, że funkcja f jest odwrotna sama do siebie, czyli $f(f(x)) = x$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$. W konsekwencji $g(x) = x$ dla $x \neq 1$, wobec czego $g'(x) = 1$. W szczególności $g'(\sqrt{2}) = 1$ jest liczbą wymierną.

554. Funkcja $f : Z \rightarrow Z$, gdzie $Z = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3 - 1}}{x}.$$

Funkcja g jest złożeniem 666 egzemplarzy funkcji f :

$$g(x) = f(f(f(\dots f(f(x))\dots))).$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'(\sqrt{2})$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3 - 1}}{x} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}},$$

skąd

$$f(f(x)) = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{(f(x))^3}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x^3}}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{\frac{x^3 - 1}{x^3}}} = \sqrt[3]{1 - \frac{x^3}{x^3 - 1}} = \sqrt[3]{\frac{-1}{x^3 - 1}}$$

oraz

$$f(f(f(x))) = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{(f(f(x)))^3}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{\frac{-1}{x^3 - 1}}} = \sqrt[3]{1 + x^3 - 1} = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

Z otrzymanej równości $f(f(f(x))) = x$ wynika $g(x) = x$ dla $x \in Z$, co daje $g'(x) = 1$. W szczególności $g'(\sqrt{2}) = 1$ jest liczbą wymierną.

555. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 2x^2 - 2x - 1}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{2h} - 2h^2 - 2h - 1}{h^3} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2h} - 2h^2 - 2h - 1 - Ah^3}{h^4}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2e^{2h} - 4h - 2 - 3Ah^2}{4h^3}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4e^{2h} - 4 - 6Ah}{12h^2}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8e^{2h} - 6A}{24h}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{8-6A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A = 4/3$. Wówczas możemy po raz czwarty zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16e^{2h}}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A = 4/3$ i wówczas $f'(0) = 2/3$.

556. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1 - x} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos h}{e^h - 1 - h} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h - Ae^h + A + Ah}{he^h - h - h^2}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h - Ae^h + A}{e^h + he^h - 1 - 2h}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - Ae^h}{2e^h + he^h - 2}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{1-A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A = 1$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin h - e^h}{3e^h + he^h} = -\frac{1}{3}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A = 1$ i wówczas $f'(0) = -1/3$.

557. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - e^{2x} - \ln(1+x)}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{3h} - e^{2h} - \ln(1+h)}{h^2} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{3h} - e^{2h} - \ln(1+h) - Ah^2}{h^3}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3e^{3h} - 2e^{2h} - \frac{1}{1+h} - 2Ah}{3h^2}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9e^{3h} - 4e^{2h} + \frac{1}{(1+h)^2} - 2A}{6h}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{6-2A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A = 3$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{27e^{3h} - 8e^{2h} - \frac{2}{(1+h)^3}}{6} = \frac{17}{6}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A = 3$ i wówczas $f'(0) = 17/6$.

558. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2xe^{-x} - \ln(1+2x)}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2he^{-h} - \ln(1+2h)}{h^3} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2he^{-h} - \ln(1+2h) - Ah^3}{h^4}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2e^{-h} - 2he^{-h} - \frac{2}{1+2h} - 3Ah^2}{4h^3}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4e^{-h} + 2he^{-h} + \frac{4}{(1+2h)^2} - 6Ah}{12h^2}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6e^{-h} - 2he^{-h} - \frac{16}{(1+2h)^3} - 6A}{24h}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{-10-6A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A = -5/3$. Wówczas możemy po raz czwarty zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-8e^{-h} + 2he^{-h} + \frac{96}{(1+2h)^4}}{24} = \frac{-8 + 96}{24} = \frac{88}{24} = \frac{11}{3}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A = -5/3$ i wówczas $f'(0) = 11/3$.

559. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \sqrt{1+x}}{\ln(1+x)} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h - \sqrt{1+h}}{\ln(1+h)} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - \sqrt{1+h} - A \cdot \ln(1+h)}{h \cdot \ln(1+h)}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - \frac{1}{2\sqrt{1+h}} - \frac{A}{1+h}}{\ln(1+h) + \frac{h}{1+h}}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{1/2-A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=1/2$. Wówczas możemy po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h + \frac{1}{4(1+h)^{3/2}} + \frac{1/2}{(1+h)^2}}{\frac{1}{1+h} + \frac{1}{(1+h)^2}} = \frac{7}{8}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=1/2$ i wówczas $f'(0) = 7/8$.

560. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{e^x} - e^{x+1}}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{e^h} - e^{h+1}}{h^2} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{e^h} - e^{h+1} - Ah^2}{h^3}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{e^h} \cdot e^h - e^{h+1} - 2Ah}{3h^2}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{e^h} \cdot e^{2h} + e^{e^h} \cdot e^h - e^{h+1} - 2A}{6h}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{e-2A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=e/2$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{e^h} \cdot e^{3h} + 2 \cdot e^{e^h} \cdot e^{2h} + e^{e^h} \cdot e^{2h} + e^{e^h} \cdot e^h - e^{h+1}}{6} = \frac{4e}{6} = \frac{2e}{3}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=e/2$ i wówczas $f'(0) = 2e/3$.