Zadania do omówienia na ćwiczeniach w piątek 8.01.2021 i poniedziałek 11.01.2021.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

536. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Funkcja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do f, tzn. $f(g(x))=g(f(x))=x$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Podać wzór na pochodną funkcji g. Podać przykład takiej liczby wymiernej $x>1$, że liczba $g'(x)$ jest wymierna.

537. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem $g(x)=x^5+x$. Obliczyć $f'(0)$, $f'(2)$ i $f'(34)$.

538. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem $g(x)=x^3+9x$. Obliczyć $f'(0)$, $f'(10)$ i $f'(100)$.

W każdym z kolejnych 7 zadań funkcja $g_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określonej podanym wzorem. W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji g_i w trzech podanych punktach.

539. $f_1(x)=x^3+x$ $g_1'(0)=\ldots\ldots$ $g_1'(2)=\ldots\ldots$ $g_1'(130)=\ldots\ldots$

540. $f_2(x)=x^7+x$ $g_2'(0)=\ldots\ldots$ $g_2'(2)=\ldots\ldots$ $g_2'(130)=\ldots\ldots$

541. $f_3(x)=x^3+5x$ $g_3'(0)=\ldots\ldots$ $g_3'(6)=\ldots\ldots$ $g_3'(42)=\ldots\ldots$

542. $f_4(x)=x^5+5x$ $g_4'(0)=\ldots\ldots$ $g_4'(6)=\ldots\ldots$ $g_4'(42)=\ldots\ldots$

543. $f_5(x)=x^3+2x$ $g_5'(3)=\ldots\ldots$ $g_5'(12)=\ldots\ldots$ $g_5'(72)=\ldots\ldots$

544. $f_6(x)=x^3+4x$ $g_6'(5)=\ldots\ldots$ $g_6'(16)=\ldots\ldots$ $g_6'(80)=\ldots\ldots$

545. $f_7(x)=2x^3+x$ $g_7'(3)=\ldots\ldots$ $g_7'(18)=\ldots\ldots$ $g_7'(57)=\ldots\ldots$

W każdym z kolejnych 5 zadań dla podanej funkcji $g_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funkcja $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f_i\left(g_i(x)\right)=x^3+3x\,.$$

W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji f_i w trzech podanych punktach.

546. $g_1(x)=x^3+x+6$ $\quad f_1'(8)=\,.....\quad f_1'(16)=\,.....\quad f_1'(36)=\,.....$

547. $g_2(x)=x^3+2x+3$ $\quad f_2'(6)=\,.....\quad f_2'(15)=\,.....\quad f_2'(36)=\,.....$

548. $g_3(x)=2x^3+x$ $\quad f_3'(3)=\,.....\quad f_3'(18)=\,.....\quad f_3'(57)=\,.....$

549. $g_4(x)=x^5+x+2$ $\quad f_4'(2)=\,.....\quad f_4'(4)=\,.....\quad f_4'(36)=\,.....$

550. $g_5(x)=x^5+2x$ $\quad f_5'(0)=\,......\quad f_5'(3)=\,......\quad f_5'(36)=\,......$

551. Funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right).$$

Funkcja g jest złożeniem 2020 egzemplarzy funkcji f:

$$g(x)=f(f(f(\ldots f(f(x))\ldots)))\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'\left(\sqrt{e}\right)$ jest wymierna.

552. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x)=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}+\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}-1\right)+\operatorname{arctg}\left(\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}-\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}-1\right)$$

na przedziale $[10,50]$ i określić, w których punktach te wartości są przyjmowane. Doprowadzić wartości najmniejszą i największą do tak prostej postaci, aby było widać, czy są to liczby wymierne, czy niewymierne.

Wskazówka: $f=g\circ h$, gdzie

$$g(t)=\operatorname{arctg}(t-1)+\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{t}-1\right)$$

oraz

$$h(x)=\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}+\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}\,.$$

553. Funkcja $f:Z\to Z$, gdzie $Z=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, jest określona wzorem

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}\,.$$

Funkcja g jest złożeniem 666 egzemplarzy funkcji f:

$$g(x)=f(f(f(\ldots f(f(x))\ldots)))\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'\left(\sqrt{2}\right)$ jest wymierna.

554. Funkcja $f:Z\to Z$, gdzie $Z=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, jest określona wzorem

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x}.$$

Funkcja g jest złożeniem 666 egzemplarzy funkcji f:

$$g(x)=f(f(f(\ldots f(f(x))\ldots)))\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'\left(\sqrt{2}\right)$ jest wymierna.

555. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-2x^2-2x-1}{x^3} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

556. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1-x} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

557. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}-\ln(1+x)}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

558. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2xe^{-x}-\ln(1+2x)}{x^3} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

559. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-\sqrt{1+x}}{\ln(1+x)} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

560. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{e^x}-e^{x+1}}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.