504. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x^2-3\cdot|x+1|$$

na przedziale $[-2, 2]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$|x+1|=\begin{cases} x+1 & \text{dla} \quad x\in[-1, +\infty) \\ -x-1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty, -1) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x-3 & \text{dla} \quad x\in[-1, 2] \\ x^2+3x+3 & \text{dla} \quad x\in[-2, -1) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-2, 2]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{dla} \quad x\in(-1, 2) \\ 2x+3 & \text{dla} \quad x\in(-2, -1) \end{cases}$$

W punkcie -1 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-1, 2)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do równania $2x-3=0$, co ma rozwiązanie $x=3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-1, 2)$.

2° W przypadku $x\in(-2, -1)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2x+3=0$, co ma rozwiązanie $x=-3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-2, -1)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -2 i 2,
- miejsca zerowe pochodnej: $-3/2$ i $3/2$,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -1.

$$f(-2)=1\,,$$
$$f(-3/2)=3/4\,,$$
$$f(-1)=1\,,$$
$$f(3/2)=-21/4=-5,25\,,$$
$$f(2)=-5\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-21/4$ w punkcie $3/2$, a wartość największą równą 1 w punktach -2 oraz -1.

505. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=x+\left|x^2-6\right|$$
na przedziale $[-4, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że
$$\left|x^2-6\right|=\begin{cases} x^2-6 & \text{dla } x\in\left(-\infty, -\sqrt{6}\right]\cup\left[\sqrt{6}, +\infty\right) \\ -x^2+6 & \text{dla } x\in\left(-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right) \end{cases}$$
a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci
$$f(x)=\begin{cases} x+x^2-6 & \text{dla } x\in\left[-4, -\sqrt{6}\right]\cup\left[\sqrt{6}, 3\right] \\ x-x^2+6 & \text{dla } x\in\left(-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right) \end{cases}$$
W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-4, 3]$ jest dana wzorem
$$f'(x)=\begin{cases} 1+2x & \text{dla } x\in\left(-4, -\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6}, 3\right) \\ 1-2x & \text{dla } x\in\left(-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right) \end{cases}$$
W punktach $-\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in\left(-4, -\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6}, 3\right)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do równania $1+2x=0$, co ma rozwiązanie $x=-1/2$, które jednak nie należy do rozważanego zbioru $\left(-4, -\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6}, 3\right)$.

2° W przypadku $x\in\left(-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $1-2x=0$, co ma rozwiązanie $x=1/2$, które należy do rozważanego przedziału $\left(-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:
- końce przedziału: -4 i 3,
- miejsce zerowe pochodnej: $1/2$,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$.

$$f(-4)=6\,,$$
$$f\left(-\sqrt{6}\right)=-\sqrt{6}\,,$$
$$f(1/2)=6,25\,,$$
$$f\left(\sqrt{6}\right)=\sqrt{6}\,,$$
$$f(3)=6\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-\sqrt{6}$ w punkcie $-\sqrt{6}$, a wartość największą równą $6,25=25/4$ w punkcie $1/2$.

506. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x+\left|x^2-x-6\right|$$

na przedziale $[-5,\,5]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^2-x-6=(x-3)\cdot(x+2)\,.$$

Stąd

$$\left|x^2-x-6\right|=\begin{cases} x^2-x-6 & \text{dla } x\in(-\infty,\,-2]\cup[3,\,+\infty) \\ -x^2+x+6 & \text{dla } x\in(-2,\,3) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} x^2-6 & \text{dla } x\in[-5,\,-2]\cup[3,\,5] \\ -x^2+2x+6 & \text{dla } x\in(-2,\,3) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-5,\,5]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{dla } x\in(-5,\,-2)\cup(3,\,5) \\ -2x+2 & \text{dla } x\in(-2,\,3) \end{cases}$$

W punktach -2 i 3 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-5,\,-2)\cup(3,\,5)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2x=0$, co ma rozwiązanie $x=0$, które jednak nie należy do rozważanego zbioru $(-5,\,-2)\cup(3,\,5)$.

2° W przypadku $x\in(-2,\,3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $-2x+2=0$, co ma rozwiązanie $x=1$, które należy do rozważanego przedziału $(-2,\,3)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:
- końce przedziału: -5 i 5,
- miejsce zerowe pochodnej: 1,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -2 i 3.

$$f(-5)=19\,,$$
$$f(-2)=-2\,,$$
$$f(1)=7\,,$$
$$f(3)=3\,,$$
$$f(5)=19\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -2 w punkcie -2, a wartość największą równą 19 w punktach -5 i 5.

507. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x^2-\sqrt{4x^2+4x+1}$$

na przedziale $[-3, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\sqrt{4x^2+4x+1}=\sqrt{(2x+1)^2}=|2x+1|=\begin{cases} 2x+1 & \text{dla} \quad x\in[-1/2, +\infty) \\ -2x-1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty, -1/2) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x-1 & \text{dla} \quad x\in[-1/2, 3] \\ x^2+2x+1 & \text{dla} \quad x\in[-3, -1/2) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-3, 3]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & \text{dla} \quad x\in(-1/2, 3) \\ 2x+2 & \text{dla} \quad x\in(-3, -1/2) \end{cases}$$

W punkcie $-1/2$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-1/2, 3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do równania $2x-2=0$, co ma rozwiązanie $x=1$, które należy do rozważanego przedziału $(-1/2, 3)$.

2° W przypadku $x\in(-3, -1/2)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2x+2=0$, co ma rozwiązanie $x=-1$, które należy do rozważanego przedziału $(-3, -1/2)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -3 i 3,
- miejsca zerowe pochodnej: -1 i 1,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-1/2$.

$$f(-3)=4\,,$$
$$f(-1)=0\,,$$
$$f(-1/2)=1/4=0,25\,,$$
$$f(1)=-2\,,$$
$$f(3)=2\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -2 w punkcie 1, a wartość największą równą 4 w punkcie -3.

508. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\sqrt{9x^2+6x+1}-x^2$$

na przedziale $[-2,\,3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x)=\sqrt{9x^2+6x+1}-x^2=\sqrt{(3x+1)^2}-x^2=|3x+1|-x^2$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} 3x+1-x^2 & \text{dla } \ x\in[-1/3,\,3] \\ -3x-1-x^2 & \text{dla } \ x\in[-2,\,-1/3) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-2,\,3]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 3-2x & \text{dla } \ x\in(-1/3,\,3) \\ -3-2x & \text{dla } \ x\in(-2,\,-1/3) \end{cases}$$

W punkcie $-1/3$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-1/3,\,3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $3-2x=0$, co ma rozwiązanie $x=3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-1/3,\,3)$.

2° W przypadku $x\in(-2,\,-1/3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $-3-2x=0$, co ma rozwiązanie $x=-3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-2,\,-1/3)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:
- końce przedziału: -2 i 3,
- miejsca zerowe pochodnej: $-3/2$ i $3/2$,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-1/3$.

$$f(-2)=1\,,$$
$$f(-3/2)=5/4\,,$$
$$f(-1/3)=-1/9\,,$$
$$f(3/2)=13/4\,,$$
$$f(3)=1\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-1/9$ w punkcie $-1/3$, a wartość największą równą $13/4$ w punkcie $3/2$.

509. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=3x+\left|x^3-9x\right|$$

na przedziale $\left[-4,\,\sqrt{10}\right]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że
$$x^3-9x=(x-3)\cdot x\cdot(x+3)\,.$$
Stąd
$$\left|x^3-9x\right|=\begin{cases} x^3-9x & \text{dla } x\in[-3,\,0]\cup[3,\,+\infty) \\ -x^3+9x & \text{dla } x\in(-\infty,\,-3)\cup\in(0,\,3)\end{cases}$$
a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci
$$f(x)=\begin{cases} x^3-6x & \text{dla } x\in[-3,\,0]\cup\left[3,\,\sqrt{10}\right] \\ -x^3+12x & \text{dla } x\in[-4,\,-3)\cup\in(0,\,3)\end{cases}$$
W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $\left[-4,\,\sqrt{10}\right]$ jest dana wzorem
$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-6 & \text{dla } x\in(-3,\,0)\cup\left(3,\,\sqrt{10}\right) \\ -3x^2+12 & \text{dla } x\in(-4,\,-3)\cup\in(0,\,3)\end{cases}$$
W punktach -3, 0 i 3 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-3,\,0)\cup\left(3,\,\sqrt{10}\right)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $3x^2=6$, co ma dwa rozwiązania $x=\pm\sqrt{2}$, z których tylko jedno, a mianowicie $x=-\sqrt{2}$, należy do rozważanego zbioru $(-3,\,0)\cup\left(3,\,\sqrt{10}\right)$.

2° W przypadku $x\in(-4,\,-3)\cup\in(0,\,3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $3x^2=12$, co ma dwa rozwiązania $x=\pm 2$, z których tylko jedno, a mianowicie $x=2$, należy do rozważanego zbioru $(-4,\,-3)\cup\in(0,\,3)$.

Porównamy wartości funkcji f w siedmiu punktach:
- końce przedziału: -4 i $\sqrt{10}$,
- miejsca zerowe pochodnej: $-\sqrt{2}$ i 2,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -3, 0 i 3.

$$f(-4)=16\,,\qquad f(-3)=-9\,,\qquad f(0)=13\,,\qquad f(2)=16\,,\qquad f(3)=9\,,$$
$$f\left(-\sqrt{2}\right)=\left(-\sqrt{2}\right)^3+6\cdot\sqrt{2}=-2\cdot\sqrt{2}+6\cdot\sqrt{2}=4\cdot\sqrt{2}\in(4,\,8),\quad \text{bo}\quad \sqrt{2}\in(1,\,2)\,,$$
$$f\left(\sqrt{10}\right)=\left(\sqrt{10}\right)^3-6\cdot\sqrt{10}=10\cdot\sqrt{10}-6\cdot\sqrt{10}=4\cdot\sqrt{10}\in(12,\,16),\quad \text{bo}\quad \sqrt{10}\in(3,\,4)\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -9 w punkcie -3, a wartość największą równą 16 w punktach -4 i 2.

510. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=2x+\sqrt{x^4-98x^2+7^4}$$
na przedziale $[-11,\,9]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że
$$f(x)=2x+\sqrt{x^4-98x^2+7^4}=2x+\sqrt{\left(x^2-49\right)^2}=2x+\left|x^2-49\right|\,, \tag{1}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} 2x+x^2-49 & \text{dla} \quad x\in[-11,\,-7]\cup[7,\,9] \\ 2x-x^2+49 & \text{dla} \quad x\in(-7,\,7) \end{cases} \tag{2}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-11,\,9]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 2+2x & \text{dla} \quad x\in(-11,\,-7)\cup(7,\,9) \\ 2-2x & \text{dla} \quad x\in(-7,\,7) \end{cases} \tag{3}$$

W punktach ± 7 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-11,\,-7)\cup(7,\,9)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2+2x=0$, co ma rozwiązanie $x=-1$, które **nie należy** do rozważanego zbioru $(-11,\,-7)\cup(7,\,9)$.

2° W przypadku $x\in(-7,\,7)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2-2x=0$, co ma rozwiązanie $x=1$, które **należy** do rozważanego przedziału $(-7,\,7)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:
- końce przedziału: -11 i 9,
- miejsce zerowe pochodnej: 1,
- punkty, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -7 i 7.

$$f(-11)=50\,,$$
$$f(-7)=-14\,,$$
$$f(1)=50\,,$$
$$f(7)=14\,,$$
$$f(9)=50\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -14 w punkcie -7, a wartość największą równą 50 w punktach -11, 1 i 9.

511. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x)=\frac{x}{99}-\frac{10\cdot\ln(x^2+1)}{99}+\operatorname{arctg} x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[9,\,11]$.

Rozwiązanie:

Różniczkujemy funkcję f i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy:

$$f'(x)=\frac{1}{99}-\frac{10\cdot 2x}{99\cdot(x^2+1)}+\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{99\cdot(x^2+1)}-\frac{20x}{99\cdot(x^2+1)}+\frac{99}{99\cdot(x^2+1)}=$$
$$=\frac{x^2-20x+100}{99\cdot(x^2+1)}=\frac{(x-10)^2}{99\cdot(x^2+1)}\geqslant 0\,,$$

przy czym w ostatniej nierówności równość zachodzi tylko dla $x=10$. Ponieważ w interesującym nas przedziale pochodna funkcji f jest dodatnia za wyjątkiem jednego punktu, w którym ma wartość zero, funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

Odpowiedź: Funkcja f osiąga wartość najmniejszą na początku przedziału, czyli w punkcie 9, a największą na końcu, czyli w punkcie 11.

Uwaga: Na ogół w tego typu zadaniu nie badalibyśmy znaku pochodnej, a jedynie porównalibyśmy wartości funkcji na końcach przedziału i w miejscach zerowania się pochodnej. Jednak w tym wypadku jest to praktycznie niewykonalne bez użycia kalkulatora, mamy bowiem:

$$f(9)=\frac{1}{11}-\frac{10\cdot\ln 82}{99}+\operatorname{arctg} 9\approx \mathbf{1{,}10592}5\,,$$

$$f(10)=\frac{10}{99}-\frac{10\cdot\ln 101}{99}+\operatorname{arctg} 10\approx \mathbf{1{,}10596}4\,,$$

$$f(11)=\frac{1}{9}-\frac{10\cdot\ln 122}{99}+\operatorname{arctg} 11\approx \mathbf{1{,}10599}3\,.$$

512. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x)=\frac{9}{x}-\frac{81}{8x^2}+\ln x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[4,\ 5]$.

Rozwiązanie:

Różniczkujemy funkcję f i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy:

$$f'(x)=-\frac{9}{x^2}+\frac{81}{4x^3}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{81}{4x^3}=\frac{4x^2-36x+81}{4x^3}=\frac{(2x-9)^2}{4x^3}\geqslant 0\,,$$

przy czym w ostatniej nierówności równość zachodzi tylko dla $x=9/2$. Ponieważ w interesującym nas przedziale pochodna funkcji f jest dodatnia za wyjątkiem jednego punktu, w którym ma wartość zero, funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

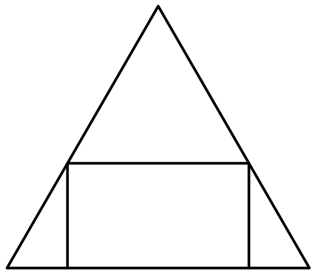
Odpowiedź: Funkcja f osiąga wartość najmniejszą na początku przedziału, czyli w punkcie 4, a największą na końcu, czyli w punkcie 5.

Uwaga: Na ogół w tego typu zadaniu nie badalibyśmy znaku pochodnej, a jedynie porównalibyśmy wartości funkcji na końcach przedziału i w miejscach zerowania się pochodnej. Jednak w tym wypadku jest to praktycznie niewykonalne bez użycia kalkulatora, mamy bowiem:

$$f(4)=\frac{207}{128}+\ln 4\approx 3{,}00348\,,$$

$$f(9/2)=\frac{3}{2}+\ln(9/2)\approx 3{,}00408\,,$$

$$f(5)=\frac{279}{200}+\ln 5\approx 3{,}00444\,.$$



513. W stożku o objętości 1 chcemy umieścić walec w taki sposób, że jedna z podstaw walca leży w płaszczyźnie podstawy stożka, a obwód drugiej podstawy walca leży na powierzchni bocznej stożka. Rysunek obok przedstawia widok z boku, ewentualnie przekrój płaszczyzną zawierającą wspólną oś obrotu stożka i walca. Jaką największą objętość może mieć walec?

Rozwiązanie:

Niech r będzie promieniem podstawy stożka, a h jego wysokością. Jeżeli walec ma wysokość $x\in(0,h)$, to jego podstawa ma promień $r\cdot\left(1-\frac{x}{h}\right)$, co ustalamy na podstawie prostych rozważań geometrycznych.

Wówczas objętość walca jest równa

$$V(x)=\pi\cdot x\cdot r^2\cdot\left(1-\frac{x}{h}\right)^2 .$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x\to 0^+} V(x)=\lim_{x\to h^-} V(x)=0 ,$$

a ponadto

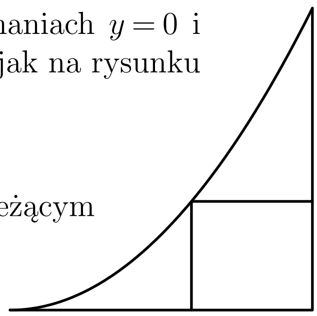
$$V'(x)=\pi\cdot r^2\cdot\left(1-\frac{x}{h}\right)^2-\frac{2\pi\cdot x\cdot r^2}{h}\cdot\left(1-\frac{x}{h}\right)=\left(1-\frac{x}{h}-\frac{2x}{h}\right)\cdot\pi\cdot r^2\cdot\left(1-\frac{x}{h}\right)=$$
$$=\left(1-\frac{3x}{h}\right)\cdot\pi\cdot r^2\cdot\left(1-\frac{x}{h}\right) .$$

Wobec tego $V'(x)=0$ dla $x=h/3$, co prowadzi do maksymalnej objętości walca równej

$$V(h/3)=\pi\cdot\frac{h}{3}\cdot r^2\cdot\left(1-\frac{h/3}{h}\right)^2=\frac{\pi\cdot h\cdot r^2}{3}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{9} .$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy z podanego w treści zadania założenia, że stożek ma objętość $1=\pi r^2h/3$.

Odpowiedź: Największa możliwa objętość walca wynosi 4/9.



514. W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach $y=0$ i $x=1$ oraz parabolą o równaniu $y=x^2$ chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?

Rozwiązanie:

Niech (a,a^2), gdzie $a\in(0,1)$, będzie wierzchołkiem prostokąta leżącym na paraboli.

Wówczas pole prostokąta jest równe

$$P(a)=(1-a)\cdot a^2=a^2-a^3 .$$

Zauważmy, że

$$\lim_{a\to 0^+} P(a)=\lim_{a\to 1^-} P(a)=0 ,$$

a ponadto

$$P'(a)=2a-3a^2 .$$

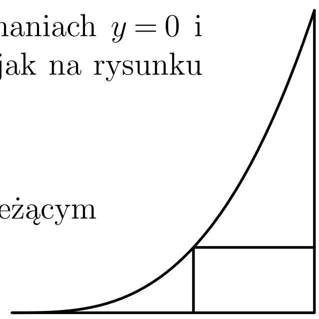
Wobec tego $P'(a)=0$ dla $a=2/3$, co prowadzi do maksymalnej wartości pola prostokąta równej
$$P\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{27}\,.$$

Odpowiedź: Największe możliwe pole prostokąta wynosi 4/27.

Uwaga: Używając odpowiedniej wersji[1] nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną można uniknąć różniczkowania.

Mamy bowiem
$$P(a)\;=\;(1-a)\cdot a^2\;=\;4\;\cdot\;(\mathbf{1}-\mathbf{a})\cdot\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}}\cdot\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}}\,,$$
gdzie otrzymaliśmy iloczyn trzech czynników dodatnich o stałej sumie równej 1, a taki iloczyn jest największy, gdy wszystkie trzy czynniki są równe, czyli równe 1/3.

515. W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach $y=0$ i $x=1$ oraz krzywą o równaniu $y=x^3$ chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?



Rozwiązanie:

Niech $(a,\,a^3)$, gdzie $a\in(0,\,1)$, będzie wierzchołkiem prostokąta leżącym na krzywej.

Wówczas pole prostokąta jest równe
$$P(a)=(1-a)\cdot a^3=a^3-a^4\,.$$

Zauważmy, że
$$\lim_{a\to 0^+}P(a)=\lim_{a\to 1^-}P(a)=0\,,$$
a ponadto
$$P'(a)=3a^2-4a^3\,.$$
Wobec tego $P'(a)=0$ dla $a=3/4$, co prowadzi do maksymalnej wartości pola prostokąta równej
$$P\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{27}{64}=\frac{27}{256}\,.$$

Odpowiedź: Największe możliwe pole prostokąta wynosi 27/256.

516. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^2+12}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{C}\,,$$
gdzie $C=6$ **(wersja trudniejsza)** lub $C=3$ **(wersja łatwiejsza).**

Rozwiązanie:

---
[1] $xyz\leqslant\frac{x+y+z}{3}\cdot\frac{x+y+z}{3}\cdot\frac{x+y+z}{3}$

Rozwiązanie wersji łatwiejszej:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^4-b^4=\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)=(a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right),$$

który przy założeniu $a+b\neq 0$ można zapisać w postaci

$$a-b=\frac{a^4-b^4}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)}.$$

Przyjmując $a=\sqrt[4]{x^2+12}$ oraz $b=\sqrt[4]{y^2+12}$, zauważamy, że $a+b>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[4]{x^2+12}-\sqrt[4]{y^2+12}\right|=\left|\frac{(x^2+12)-(y^2+12)}{\left(\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}\right)\left(\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}\right)}\right|=$$

$$=\frac{|x^2-y^2|}{\left(\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}\right)}=$$

$$=\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}\right)}.$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}<\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12},$$

skąd

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}}<1.$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[4]{0+12}+\sqrt[4]{0+12}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt[4]{12}}.$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}\right)}=$$

$$=|x-y|\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}}\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}}\leqslant$$

$$\leqslant|x-y|\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt[4]{12}}\cdot 1=\frac{|x-y|}{\sqrt[4]{16\cdot 12}}\leqslant\frac{|x-y|}{\sqrt[4]{9\cdot 9}}=\frac{|x-y|}{3}.$$

Rozwiązanie wersji trudniejszej:

Pominąwszy trywialny przypadek $x=y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej rachunku różniczkowego wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|\cdot|f'(c)|,$$

gdzie c leży pomiędzy x i y.

Wystarczy więc wykazać, że $|f'(x)|\leqslant 1/6$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Przyjmując[2]

$$g(x)=f'(x)=\frac{x}{2\cdot\left(x^2+12\right)^{3/4}}$$

otrzymujemy

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{2\cdot\left(x^2+12\right)^{3/4}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{-1/2}}{2\cdot\left(1+12\cdot x^{-2}\right)^{3/4}}=0\,.$$

Zauważmy, że g jest różniczkowalna na całej prostej, a jej pochodna jest dana wzorem

$$g'(x)=\frac{1}{2\cdot\left(x^2+12\right)^{3/4}}-\frac{3x^2}{4\cdot\left(x^2+12\right)^{7/4}}\,.$$

Rozwiązujemy równanie na zerowanie się tej pochodnej:

$$\frac{1}{2\cdot\left(x^2+12\right)^{3/4}}=\frac{3x^2}{4\cdot\left(x^2+12\right)^{7/4}}\,,$$

$$2\cdot\left(x^2+12\right)=3x^2\,,$$

$$2\cdot 12=x^2\,,$$

$$x=\pm 2\cdot\sqrt{6}\,.$$

Wyliczamy wartość funkcji g w miejscach zerowych pochodnej:

$$g\left(\pm 2\cdot\sqrt{6}\right)=\frac{\pm 2\cdot\sqrt{6}}{2\cdot\left(\left(\pm 2\cdot\sqrt{6}\right)^2+12\right)^{3/4}}=\pm\frac{2\cdot\sqrt{6}}{2\cdot 36^{3/4}}=\pm\frac{2\cdot\sqrt{6}}{2\cdot 6^{3/2}}=\pm\frac{1}{6}\,.$$

Stąd wynika, że funkcja g przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio $-1/6$ i $1/6$, skąd $|g(x)|\leqslant 1/6$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

517. Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x\in(2,4)$ zachodzi nierówność $\sqrt[x]{x}>\sqrt{2}$.

Rozwiązanie:

Niech $f(x)=\sqrt[x]{x}$.

Wówczas

$$f'(x)=\sqrt[x]{x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}\,.$$

Zatem $f'(x)>0$ dla $x<e$ oraz $f'(x)<0$ dla $x>e$.

Wobec tego funkcja f jest rosnąca w przedziale $[2,e]$ i malejąca w przedziale $[e,4]$, a ponieważ $f(2)=f(4)=\sqrt{2}$, otrzymujemy $\sqrt[x]{x}>\sqrt{2}$ dla $x\in(2,4)$.

518. Wyznaczyć największą wartość funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x)=5\sin x-\sin 5x\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ funkcja f jest okresowa z okresem 2π i różniczkowalna, wystarczy porównać wartości funkcji w miejscach zerowych pochodnej znajdujących się w przedziale $[0,2\pi)$.

[2]W celu uniknięcia pojęcia pochodnej drugiego rzędu, gdyż to pojęcie nie pojawiło się jeszcze na wykładzie.

Skoro

$$f'(x)=5\cos x-5\cos 5x\,,$$

równanie $f'(x)=0$ jest równoważne równaniu

$$\cos x=\cos 5x\,.$$

Ponieważ równość

$$\cos x=\cos y$$

jest równoważna istnieniu liczby całkowitej k i znaku $\pm$ takich, że

$$y=2k\pi\pm x\,,$$

otrzymujemy równanie

$$5x=2k\pi\pm x\,,$$

czyli

$$(5\mp 1)\cdot x=2k\pi\,.$$

Wobec tego

$$x=\frac{k\pi}{2} \qquad \text{lub} \qquad x=\frac{k\pi}{3}\,,$$

co w połączeniu z warunkiem $x\in[0,\,2\pi)$ prowadzi do ośmiu miejsc zerowych pochodnej w jednym okresie.

Sprawdzając wartości funkcji f w tych ośmiu punktach otrzymujemy:

$$f(0)=0\,,\qquad f(\pi/3)=3\sqrt{3}\,,\qquad f(\pi/2)=4\,,\qquad f(2\pi/3)=3\sqrt{3}\,,$$
$$f(\pi)=0\,,\qquad f(4\pi/3)=-3\sqrt{3}\,,\qquad f(3\pi/2)=-4\,,\qquad f(5\pi/3)=-3\sqrt{3}\,.$$

Odpowiedź: Największa wartość funkcji f jest równa $3\sqrt{3}$.

519. Niech $f(x)=4\cos x+\sin 4x$. Podać wszystkie miejsca zerowe pochodnej funkcji f w przedziale $[0,\,2\pi)$.

Rozwiązanie:

$$\frac{\pi}{10}\,,\qquad \frac{\pi}{2}\,,\qquad \frac{9\pi}{10}\,,\qquad \frac{7\pi}{6}\,,\qquad \frac{13\pi}{10}\,,\qquad \frac{17\pi}{10}\,,\qquad \frac{11\pi}{6}\,.$$

520. Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$16\cdot\operatorname{arctg} 7+\ln 13 \qquad \text{czy} \qquad 16\cdot\operatorname{arctg} 8+\ln 10\ ?$$

Wskazówka 1: Podane liczby są większe od 25, a różnią się o mniej niż 0,02 — nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Wskazówka 2: Zbadaj funkcję pomocniczą $f(x)=16\operatorname{arctg} x-\ln(x^2+1)$.

Rozwiązanie:

Różniczkując podaną we wskazówce funkcję pomocniczą otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{16}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2(8-x)}{x^2+1}>0$$

dla $x<8$. Zatem funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty,8]$. W szczególności $f(7)<f(8)$, skąd dostajemy kolejno:

$$16\cdot\operatorname{arctg}7-\ln 50 < 16\cdot\operatorname{arctg}8-\ln 65\,,$$
$$16\cdot\operatorname{arctg}7+\ln 65 < 16\cdot\operatorname{arctg}8+\ln 50\,,$$
$$16\cdot\operatorname{arctg}7+\ln 13+\ln 5 < 16\cdot\operatorname{arctg}8+\ln 10+\ln 5\,,$$
$$16\cdot\operatorname{arctg}7+\ln 13 < 16\cdot\operatorname{arctg}8+\ln 10\,.$$

Odpowiedź: Większa jest liczba $16\cdot\operatorname{arctg}8+\ln 10$.

W każdym z 10 poniższych zadań podaj największą wartość funkcji f na przedziale $[0,\infty)$. Odpowiedzi podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

521. $f(x)=\sqrt{x}-2x^2$ **3/8**

522. $f(x)=4\sqrt{x}-x^2$ **3**

523. $f(x)=32\sqrt{x}-x^2$ **48**

524. $f(x)=4\sqrt{x}-27x^2$ **1**

525. $f(x)=32\sqrt{x}-27x^2$ **16**

526. $f(x)=4\sqrt{x}-125x^2$ **3/5**

527. $f(x)=6\sqrt{x}-x^3$ **5**

528. $f(x)=3\sqrt{x}-16x^3$ **5/4**

529. $f(x)=8\sqrt{x}-x^4$ **7**

530. $f(x)=\sqrt{x}-16x^4$ **7/16**